Beispiel 1: Stationäre Streuzustände (1–dimensional)

Der Hilbertraum $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$ zusammen mit den uneigentlichen Eigenfunktionen ist der Zustandsraum der zur Beschreibung der Bewegung eines Teilchens mit der Masse m in einer Raumdimension herangezogen wird. Gesucht sind stationären Streuzustände des Teilchens, das sich im folgenden Stufenpotential bewegt, wobei $V_0 > 0$ und $a > 0$ angenommen ist:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \ldots \text{ Bereich 1:} \quad -\infty < x < -a \\ +V_0 & \ldots \text{ Bereich 2:} \quad -a \le x \le 0 \\ -4V_0 & \ldots \text{ Bereich 3:} \quad 0 < x \le a \\ 0 & \ldots \text{ Bereich 4:} \quad a < x < +\infty \end{cases}$$

1. Wie lautet die zugehörige zeitunabhängige Schrödingergleichung, wenn für den Eigenwert die Bedingung $E > V_0$ angenommen ist? Verwende für den stationären Streuzustand den folgenden allgemeinen Ansatz:

$$u(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \begin{cases} A_1 e^{ikx} + B_1\, e^{-ikx} & \text{Bereich 1} \\ A_2\, e^{iKx} + B_2\, e^{-iKx} & \text{Bereich 2} \\ A_3\, e^{iQx} + B_3\, e^{-iQx} & \text{Bereich 3} \\ A_4 e^{ikx} + B_4\, e^{-ikx} & \text{Bereich 4} \end{cases}$$

wobei die Größen k, K und Q entsprechend zu identifizieren sind.

2. Setze $E = \frac{4}{3}V_0$ und drücke die Größen K und Q durch die Größe k aus. Beachte dabei, dass die Größe k durch $E = \frac{4}{3}V_0$ festgelegt ist. Beachte weiters, dass alle folgenden Rechnungen für den speziellen Energiewert $E = \frac{4}{3}V_0$ durchzuführen sind.

3. Gib die Stetigkeitsbedingungen für die gesuchten Koeffizienten $\vec{A}_j = [A_j, B_j]^{\mathrm{T}}$ mit $j = 1, 2, 3, 4$ in Form von Matrixgleichungen der Gestalt $\vec{A}_j = \mathbf{Q}(x_j)\, \vec{A}_{j+1}$ an. Verwende dabei

$$\mathbf{Q}(x_j) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 + \frac{k_{j+1}}{k_j})e^{i(k_{j+1}-k_j)x_j} & (1 - \frac{k_{j+1}}{k_j})e^{-i(k_{j+1}+k_j)x_j} \\ (1 - \frac{k_{j+1}}{k_j})e^{i(k_{j+1}+k_j)x_j} & (1 + \frac{k_{j+1}}{k_j})e^{-i(k_{j+1}-k_j)x_j} \end{bmatrix}$$

und beachte, dass die allgemeine Form der jeweiligen Stetigkeitsmatrizen mit $\mathbf{Q}(x_j)$ gegeben ist, wobei mit $x_1 = -a$, $x_2 = 0$ und $x_3 = a$ die Sprungstellen des Potentials festgelegt sind. Beachte weiters, dass die Größen k_j und k_{j+1} gemäß den entsprechenden Bereichen mit k, K, oder Q zu identifizieren sind. Berechne $\mathbf{Q}(-a)$, $\mathbf{Q}(0)$ und $\mathbf{Q}(a)$.

4. Setze nun $ka = \pi$ und berechne dann die entsprechende **Transfermatrix** $\mathbf{M}$, die $\vec{A}_1 = [A_1, B_1]^{\mathrm{T}}$ mit $\vec{A}_4 = [A_4, B_4]^{\mathrm{T}}$ verknüpft, als Produkt der Matrizen $\mathbf{Q}(-a)$, $\mathbf{Q}(0)$ und $\mathbf{Q}(a)$.

5. Setze $A_1 = 1$ und $B_4 = 0$ und berechne die Koeffizienten B_1 und A_4. Zeige, daß die Unitaritätsbedingung $|B_1|^2 + |A_4|^2 = 1$ erfüllt ist, wobei wieder $ka = \pi$ angenommen ist.

Beispiel 2: Drehimpuls, Kopplungen, Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte

Ein Zweiteilchen–System besteht aus einem Spin–$\frac{3}{2}$–Teilchen und einem Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchen deren räumliche Freiheitsgrade nicht berücksichtigt sind. Der zugehörige Hilbertraum $\mathscr{H}_{\text{Gesamt}} = \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^2$ ist daher 8–dimensional und wird von den orthonormierten Elementen $\{\,|\,\frac{3}{2}, m; \frac{1}{2}, s\rangle\}$ (wobei $|\,\frac{3}{2}, m; \frac{1}{2}, s\rangle = |\,\frac{3}{2}, m\rangle^{(1)} \otimes |\,\frac{1}{2}, m\rangle^{(2)} = |\,m, s\rangle$ zu verstehen ist) der Produktbasis, die die simultanen Eigenzustände der Operatoren $\mathbf{S}_z^{(1)}$ und $\mathbf{S}_z^{(2)}$ sind, aufgespannt, wobei $m = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ und $s = \pm\frac{1}{2}$ zu verstehen ist. Der Hamiltonoperator des Zweiteilchen–Systems ist durch

$$\boxed{\mathbf{H} = 8\hbar\left(\mathbf{S}_z^{(1)} + \mathbf{S}_z^{(2)}\right) + 8\,\vec{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \vec{\mathbf{S}}^{(2)}}$$

gegeben. Dabei stellt der Operator $\vec{\mathbf{S}}^{(1)}$ den Spinoperator des Spin–$\frac{3}{2}$–Teilchens und der Operator $\vec{\mathbf{S}}^{(2)}$ den Spinoperator des Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchens dar.

1. Stelle den Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ als Funktion des Gesamtdrehimpulses (Gesamtspin) $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{S}}^{(1)} + \vec{\mathbf{S}}^{(2)}$ und seiner z–Komponente $\mathbf{S}_z$ dar.

2. Berechne mit Hilfe der Orthonormalbasis $\{\,|\,(\frac{3}{2}\frac{1}{2})SM\rangle\}$ die Eigenwerte E_{SM} von $\mathbf{H}$ und gib die Entartung der Eigenwerte an. Verwende dabei die Clebsch–Gordan Koeffizienten

$$\boxed{\begin{aligned} \langle j, M \mp \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\,|\,j + \tfrac{1}{2}, M\rangle &= \sqrt{\tfrac{j+\frac{1}{2}\pm M}{2j+1}} \\ \langle j, M \mp \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\,|\,j - \tfrac{1}{2}, M\rangle &= (-1)^{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}}\sqrt{\tfrac{j+\frac{1}{2}\mp M}{2j+1}} \end{aligned}}$$

um die entsprechenden Elemente $|\,(\frac{3}{2}\frac{1}{2})SM\rangle$ der Standardbasis von Gesamtdrehimpulseigenzuständen als Linearkombinationen der Produktzustände $|\,m, s\rangle$ **explizit** anzugeben.

3. Ordne die Energieeigenwerte nach ihrer Größe beginnend beim kleinsten. Liste für die Grundzustandsenergie und alle weiteren Eigenwerte die zugehörigen Eigenvektoren auf.

4. Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der z–Komponente vom Spin–$\frac{3}{2}$–Teilchen den Messwert $-\frac{3\hbar}{2}$ **oder** bei der z–Komponente des Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchens den Wert $-\frac{\hbar}{2}$ zu finden, wenn sich das System im Grundzustand befindet.

5. Der Operator der Spinprojektion des Gesamtdrehimpulses $\vec{\mathbf{S}}$ bezüglich einer Richtung $\underline{e} \in \mathbb{R}^3$ ist durch den Ausdruck $\mathbf{S}(\underline{e}) = \underline{e} \cdot \vec{\mathbf{S}}$ definiert. Berechne den Erwartungswert von $\mathbf{S}(\underline{e})$ für den Grundzustand, wenn die Richtung mit $\underline{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ festgelegt ist. Verwende dabei

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{S}_\pm\,|\,(\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2})SM\rangle &= \hbar\sqrt{(S \mp M)(S \pm M + 1)}\,|\,(\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2})SM \pm 1\rangle \\ \mathbf{S}_z\,|\,(\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2})SM\rangle &= \hbar M\,|\,(\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2})SM\rangle \end{aligned}}$$