

Beispiel 1: Drehimpuls, Kopplungen, Wahrscheinlichkeiten

Ein Zweiteilchen-System besteht aus einem **Spin- $\frac{3}{2}$ -Teilchen** und einem **Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen** deren räumliche Freiheitsgrade nicht berücksichtigt sind. Der zugehörige Hilbertraum $\mathcal{H}_{\text{gesamt}} = \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^2$ ist daher 8-dimensional und wird von den orthonormierten Elementen $| \frac{3}{2}, m; \frac{1}{2}, s \rangle$ der Produktbasis $E^{\frac{3}{2} \otimes \frac{1}{2}}$ aufgespannt,

$$\begin{aligned} E^{1 \otimes 1} &= \{ |m, s\rangle \mid -\frac{3}{2} \leq m \leq +\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \leq s \leq +\frac{1}{2} \} \\ |m, s\rangle &= | \frac{3}{2}, m; \frac{1}{2}, s \rangle = | \frac{3}{2}, m \rangle^{(1)} \otimes | \frac{1}{2}, s \rangle^{(2)} \end{aligned}$$

wobei $|m, s\rangle$ als Kurzschreibweise für die Elemente der Produktbasis aufgefasst wird. Die Faktoren $| \frac{3}{2}, m \rangle^{(1)}$ bzw. $| \frac{1}{2}, s \rangle^{(2)}$ der Elemente der Produktbasis sind als Elemente von Drehimpulsbasen E^{j_1} bzw. E^{j_2} mit $j_1 = \frac{3}{2}$ bzw. $j_2 = \frac{1}{2}$ zu verstehen. Beachte, dass Elemente $|j, m\rangle$ von Drehimpulsbasen $E^j = \{ |j, m\rangle \mid -j \leq m \leq +j \}$ den folgenden Gleichungen zu genügen haben

$$\begin{aligned} \underline{J}^2 |j, m\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle \\ \underline{J}_z |j, m\rangle &= \hbar m |j, m\rangle \\ \underline{J}_{\pm} |j, m\rangle &= \hbar \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle \end{aligned}$$

wobei $\underline{J}_{\pm} = \underline{J}_x \pm i\underline{J}_y$ die entsprechenden Schiebeoperatoren darstellen. Der Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ des Zweiteilchen-Systems ist durch den folgenden Ausdruck gegeben

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\hbar} (\underline{\mathbf{S}}_z^{(1)} + \underline{\mathbf{S}}_z^{(2)}) + \frac{1}{\hbar^3} (\underline{\mathbf{S}}_z^{(1)} + \underline{\mathbf{S}}_z^{(2)})^3 + \frac{16}{\hbar^4} (\underline{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{(2)})^2$$

wobei $\underline{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{(2)} = \underline{\mathbf{S}}_x^{(1)} \otimes \underline{\mathbf{S}}_x^{(2)} + \underline{\mathbf{S}}_y^{(1)} \otimes \underline{\mathbf{S}}_y^{(2)} + \underline{\mathbf{S}}_z^{(1)} \otimes \underline{\mathbf{S}}_z^{(2)}$ bedeutet, bzw. $\underline{\mathbf{S}}_a^{(1)} + \underline{\mathbf{S}}_a^{(2)} = \underline{\mathbf{S}}_a^{(1)} \otimes \mathbf{1}_{(2)} + \mathbf{1}_{(1)} \otimes \underline{\mathbf{S}}_a^{(2)}$ mit $a = x, y, z$ zu verstehen ist.

1. Stelle den Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ als Funktion des **Gesamtdrehimpulsoperators** $\underline{\mathbf{S}} = [\underline{\mathbf{S}}_x, \underline{\mathbf{S}}_y, \underline{\mathbf{S}}_z]^T = \underline{\mathbf{S}}^{(1)} + \underline{\mathbf{S}}^{(2)}$ und $\underline{\mathbf{S}}_z = \underline{\mathbf{S}}_z^{(1)} + \underline{\mathbf{S}}_z^{(2)}$ dar.
2. Berechne mit Hilfe der im folgenden angegebenen Clebsch-Gordan Koeffizienten die Eigenzustände $|(\frac{3}{2} \frac{1}{2}) SM\rangle$ des Gesamtdrehimpulses für $S = 2$ und $S = 1$,

$$|(\frac{3}{2} \frac{1}{2}) SM\rangle = \sum_{s=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \langle \frac{3}{2}, M-s; \frac{1}{2}, s | SM \rangle | \frac{3}{2}, M-s; \frac{1}{2}, s \rangle$$

dh. drücke die Elemente $|(\frac{3}{2} \frac{1}{2}) SM\rangle$ der Standardbasis **explizit** als Linearkombination der Elemente $|m, s\rangle$ der Produktbasis aus.

$$\begin{aligned} \langle j, M-s; \frac{1}{2}, s | j + \frac{1}{2}, M \rangle &= \sqrt{\frac{j + \frac{1}{2} + (-1)^{s-1/2} M}{2j+1}} \\ \langle j, M-s; \frac{1}{2}, s | j - \frac{1}{2}, M \rangle &= (-1)^{s+1/2} \sqrt{\frac{j + \frac{1}{2} - (-1)^{s-1/2} M}{2j+1}} \end{aligned}$$

3. Verwende die Tatsache, dass die Eigenzustände $|(\frac{3}{2} \frac{1}{2}) SM\rangle$ des Gesamtdrehimpulses auch Eigenzustände des Hamiltonoperators $\mathbf{H}$ sind und berechne damit die Eigenwerte E_{SM} von $\mathbf{H}$. Gib auch die Entartung der Eigenwerte samt zugehörigen Eigenvektoren an und ordne die EWe entsprechend ihrer Größe beginnend mit dem kleinsten.
4. Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der z -Komponente des **Spin- $\frac{3}{2}$ -Teilchens** den Messwert $+\frac{\hbar}{2}$ **und** bei der z -Komponente des **Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens** den Messwert $-\frac{\hbar}{2}$ zu messen, wenn sich das System im Grundzustand befindet.

Beispiel 2: Zeitunabhängige Störungstheorie

Ein Zweiteilchen-System besteht aus einem **Spin- $\frac{3}{2}$ -Teilchen** und einem **Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen** deren räumliche Freiheitsgrade nicht berücksichtigt sind. Der zugehörige Hilbertraum $\mathcal{H}_{\text{gesamt}} = \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^2$ ist daher 8-dimensional und wird, wie in **Beispiel 1**, von den orthonormierten Elementen $|\frac{3}{2}, m; \frac{1}{2}, s\rangle$ der Produktbasis $E^{\frac{3}{2} \otimes \frac{1}{2}}$ aufgespannt, wobei $|m, s\rangle$ als Kurzschreibweise für die Elemente der Drehimpuls-Produktbasis aufgefasst wird. Beachte dabei wieder, dass Elemente $|j, m\rangle$ von Drehimpulsbasen $E^j = \{|j, m\rangle \mid -j \leq m \leq +j\}$ ihren Definitionsgleichungen zu genügen haben, die bereits in Beispiel 1 angegeben sind.

Der Gesamt-Hamiltonoperator $\mathbf{H}(\xi) = \mathbf{H}_0 + \mathbf{W}(\xi)$ des Zweiteilchen-Systems ist als Summe der Operatoren $\mathbf{H}_0$ und $\mathbf{W}(\xi) = \xi \mathbf{W}$ gegeben, wobei der Operator $\mathbf{H}_0$ den **ungestörten** Hamiltonoperator, der Operator $\mathbf{W}(\xi)$ die **Störung**, bzw. ξ mit $0 < \xi < 1$ einen dimensionslosen Parameter darstellt.

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\xi) &= \mathbf{H}_0 + \mathbf{W}(\xi) \\ \mathbf{H}_0 &= -\frac{4}{\hbar}(\mathbf{S}_z^{(1)} + \mathbf{S}_z^{(2)}) + \frac{1}{\hbar^3}(\mathbf{S}_z^{(1)} + \mathbf{S}_z^{(2)})^3 + \frac{16}{\hbar^4}(\underline{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{(2)})^2 \\ \mathbf{W} &= \frac{1}{\hbar}\mathbf{S}_z^{(1)} \otimes \mathbf{1}_{(2)}\end{aligned}$$

Beachte, dass $\underline{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{S}}^{(2)} = \mathbf{S}_x^{(1)} \otimes \mathbf{S}_x^{(2)} + \mathbf{S}_y^{(1)} \otimes \mathbf{S}_y^{(2)} + \mathbf{S}_z^{(1)} \otimes \mathbf{S}_z^{(2)}$ bedeutet, bzw. $\mathbf{S}_a^{(1)} + \mathbf{S}_a^{(2)} = \mathbf{S}_a^{(1)} \otimes \mathbf{1}_{(2)} + \mathbf{1}_{(1)} \otimes \mathbf{S}_a^{(2)}$ mit $a = x, y, z$ zu verstehen ist.

1. Stelle den ungestörten Hamiltonoperator $\mathbf{H}_0$ als Funktion des **Gesamtdrehimpulsoperators** $\underline{\mathbf{S}} = [\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y, \mathbf{S}_z]^T = \underline{\mathbf{S}}^{(1)} + \underline{\mathbf{S}}^{(2)}$ und $\mathbf{S}_z = \mathbf{S}_z^{(1)} + \mathbf{S}_z^{(2)}$ dar. Beachte, dass $\mathbf{H}_0$ nicht identisch ist mit dem Operator $\mathbf{H}$ vom **Beispiel 1**.
2. Verwende die Tatsache, dass die Eigenzustände $|(\frac{3}{2}\frac{1}{2})SM\rangle$ des Gesamtdrehimpulses, die bereits in Beispiel zu berechnen sind, auch Eigenzustände des Hamiltonoperators $\mathbf{H}_0$ sind und berechne damit die Eigenwerte E_{SM} von $\mathbf{H}_0$. Gib auch die Entartung der Eigenwerte E_{SM} samt zugehörigen Eigenvektoren an und ordne die EWe entsprechend ihrer Größe beginnend mit dem kleinsten.
3. Berechne für die **Grundzustandsenergie** $E_{\min}^{(0)}$ von $\mathbf{H}_0$ in 1.ter Ordnung zeitunabhängiger Störungstheorie für nicht-entartete Energieniveaus die Energiekorrektur $\varepsilon_{\min}^{(1)}(\xi)$. Verwende dabei die Formel $\varepsilon_{\min}^{(1)}(\xi) = \langle \mathbf{u}_{\min} | \mathbf{W}(\xi) | \mathbf{u}_{\min} \rangle$, wobei $|\mathbf{u}_{\min}\rangle$ den Grundzustand darstellt.
4. Berechne für den **1.ten angeregten Zustand** $E_{\min+1}^{(0)}$ von $\mathbf{H}_0$ in 1.ter Ordnung zeitunabhängiger Störungstheorie für entartete Energieniveaus die Energiekorrekturen $\varepsilon_{\min+1,\ell}^{(1)}(\xi)$ mit $\ell = 1, 2, \dots$. Beachte dabei, dass die Größen $\varepsilon_{\min+1,\ell}^{(1)}(\xi)$ die Eigenwerte jener Matrix sind, die dem Störoperator $\mathbf{W}(\xi)$ in der orthonormierten Eigenbasis von $\mathbf{H}_0$ zugeordnet ist, die von den Eigenzuständen von $\mathbf{H}_0$ aufgespannt werden, die zum entarteten Energieeigenwert $E_{\min+1}^{(0)}$ gehören.

Beispiel 3: Stationäre Streuzustände

Der Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ zusammen mit den **uneigentlichen Eigenfunktionen** (ebene Wellen) ist der Zustandsraum der zur Beschreibung der Bewegung eines Teilchens mit der Masse m in einer Raumdimension herangezogen wird. Gesucht sind **stationäre Streuzustände** des Teilchens, das sich im folgenden Stufenpotential $V(x)$ bewegt, wobei $V_0 > 0$ und $a > 0$ angenommen ist:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \dots & \text{Bereich 1:} & -\infty < x < -a \\ -V_0 & \dots & \text{Bereich 2:} & -a \leq x \leq 0 \\ V_0/4 & \dots & \text{Bereich 3:} & 0 < x < a \\ 0 & \dots & \text{Bereich 4:} & a < x < +\infty \end{cases}$$

1. Wie lautet die zeitunabhängige Schrödingergleichung, wenn für den Eigenwert $E > V_0/4$ angenommen ist? Verwende für die stationären Streuzustände den folgenden allgemeinen Ansatz

$$u(x, t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \begin{cases} A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} & \dots & \text{Bereich 1} \\ A_2 e^{iKx} + B_2 e^{-iKx} & \dots & \text{Bereich 2} \\ A_3 e^{iQx} + B_3 e^{-iQx} & \dots & \text{Bereich 3} \\ A_4 e^{ikx} + B_4 e^{-ikx} & \dots & \text{Bereich 4} \end{cases}$$

wobei die Größen k , K und Q entsprechend zu identifizieren sind.

2. Lege die Energie $E > V_0/4$ so fest, dass $K = 2k$ gilt. Wie muss daher E als Funktion von V_0 gewählt werden, so dass die Gleichung $K = 2k$ gilt? Berechne damit auch die Grösse Q als Funktion von k .
3. Die Stetigkeitsbedingungen für die gesuchten Koeffizienten $\vec{A}_j = [A_j, B_j]^T$ mit $j = 1, 2, 3, 4$ sind in Form der Matrixgleichungen $\vec{A}_j = \mathbf{Q}(a_j) \vec{A}_{j+1}$ gegeben. Verwende dabei

$$\mathbf{Q}(a_j) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 + \frac{k_{j+1}}{k_j})e^{i(k_{j+1}-k_j)a_j} & (1 - \frac{k_{j+1}}{k_j})e^{-i(k_{j+1}+k_j)a_j} \\ (1 - \frac{k_{j+1}}{k_j})e^{i(k_{j+1}+k_j)a_j} & (1 + \frac{k_{j+1}}{k_j})e^{-i(k_{j+1}-k_j)a_j} \end{bmatrix}$$

wobei mit $a_1 = -a$, $a_2 = 0$ und $a_3 = a$ die Sprungstellen des Potentials bezeichnet sind. Berechne die **Stetigkeitsmatrizen** $\mathbf{Q}(a_j)$ für alle Sprungstellen, wobei zusätzlich die Bedingung $K = 2k$ zu berücksichtigen ist.

4. Setze nun und bei allen folgenden Rechnungen $ka = \pi$. Berechne damit alle **Stetigkeitsmatrizen** $\mathbf{Q}(a_j)$, bzw. berechne die **Transfermatrix** $\mathbf{M}$ als Produkt der Matrizen $\mathbf{Q}(-a)$, $\mathbf{Q}(0)$ und $\mathbf{Q}(a)$. Beachte, dass $\mathbf{M}$ den Spaltenvektor $\vec{A}_1 = [A_1, B_1]^T$ mit $\vec{A}_4 = [A_4, B_4]^T$ verknüpft.
5. Setze $A_1 = 1$ und $B_4 = 0$ und berechne B_1 und A_4 , die den Reflexions-, bzw. Transmissionskoeffizienten festlegen. Berechne auch die zugehörige Streumatrix $\mathbf{S}$, wobei zu beachten ist, dass $\mathbf{S}$ unitär sein muss und den Spaltenvektor $[B_1, A_4]^T$ mit $[A_1, B_4]^T$ verknüpft.