Quantenmechanik: Allgemeine Bemerkungen

Mathematische Theorie zur konsistenten Beschreibung physikalischer Phänomene im Bereich der Größenordnung $10^{-8} cm$.

Math. Formalismus:	Hilbertraum $\mathscr{H}$, Operatoren $\mathbf{A}, \ldots$
Systembeschreibung:	Hamiltonoperator $\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + \mathbf{V}(\mathbf{X})$
Zustandsbeschreibung:	Bewegungsgleichung für Zustände $\psi(t)$
	Zeitabhängige Schrödingergleichung:
	$$\boxed{(\mathbf{H} - i\hbar\partial_t)\psi(t) = 0}$$
	Quantenstatistik: Bewegungsgleichung für Dichteoperatoren $\boldsymbol{\rho}(t)$
	Zeitabhängige Operatorgleichung:
	$$\boxed{[\mathbf{H}\,,\,\boldsymbol{\rho}(t)] = i\hbar\partial_t\,\boldsymbol{\rho}(t)}$$
Gesucht:	★ Lösungen $\psi(t)$ der zeitabhängigen Schrödingergleichung ★ Stationäre Lösungen: $\lvert\psi(t)\rvert = \lvert\psi(0)\rvert$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ★ Gebundene Zustände: $\lVert\psi(t)\rVert_{\text{Bereich}(\mathbb{B})} \sim 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ★ Analog für Dichteoperatoren $\boldsymbol{\rho}(t)$

Statistische Interpretation der Wellenfunktionen

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\mathscr{P}(\mathbf{x},t) = \psi(\mathbf{x},t)^* \,\psi(\mathbf{x},t)$$

Wahrscheinlichkeitsstromdichte:

$$\vec{\mathbf{J}}(\mathbf{x},t) = \Re\{\psi(\mathbf{x},t)^*\big(-i\tfrac{\hbar}{2m}\nabla\big)\psi(\mathbf{x},t)\}$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t\,\mathscr{P}(\mathbf{x},t) + \operatorname{div}\vec{\mathbf{J}}(\mathbf{x},t) = 0$$

Probleme:

Eigenwert–Probleme: exakt lösbar

- ★ Freies Teilchen in beliebiger Dimension
- ★ Freies Teilchen mit periodischen Randbedingungen in beliebiger Dimension
- ★ Freies Teilchen im unendlich tiefen Topf in beliebiger Dimension
- ★ Harmonischer Oszillator in beliebiger Dimension
- ★ Isotroper harmonischer Oszillator in beliebiger Dimension
- ★ Wasserstoffatom in 3 Dimensionen (ohne Spin)

Gesucht: {
Eigenwerte (Spektrum)
Eigenvektoren (Aufenthaltswahrscheinlichkeit)

Eigenwert–Probleme: nicht exakt lösbar

- ★ **Zeitunabhängige Störungstheorie** nicht-entarteter, bzw. entarteter Eigenwerte des **"ungestörten" ($\longleftrightarrow$ exakt lösbaren)** Eigenwertproblems
- ★ **Variationsverfahren** (Menge von Versuchsfunktionen)

Gesucht: {
Genäherte Eigenwerte
Genäherte Eigenvektoren

Unitäre Transformationen

- ★ Unitäre Transformation von Zuständen: Basiswechsel
- ★ Zeitliche Entwicklung von Zuständen
  $\psi(0) \longmapsto \psi(t) \;=\; U(t)\,\psi(0) \;\; ; \;\; U(t) \;=\; \exp\left\{ -i\frac{t}{\hbar}\mathbf{H} \right\}$
- ★ Zeitliche Entwicklung von Operatoren: Heisenbergbild, Wechselwirkungsbild

Gesucht: {
Transformierte Zustände
Transformierte Operatoren

Zeitabhängige Störungstheorie

- ★ Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten
- ★ Fermi's goldene Regel (Näherung)
- ★ Auswahlregeln: Wigner–Eckart Theorem

Gesucht: {
Genäherte zeitabhängige Zustände
Genäherte zeitabhängige Operatoren

Streuung

- ★ Zeitunabhängige Formulierung
- ★ Zeitabhängige Formulierung

Gesucht: {
Streuzustände (zeitunabhängig, zeitabhängig)
Streuwirkungsquerschnitt

Systeme: **Einteilchenprobleme**

- ★ Ortsfreiheitsgrad: $\mathscr{H}_{\text{Ort}} = L^2(\mathbb{R}^n)$, wobei $n = 1, 2, 3$
- ★ Spinfreiheitsgrad: $\mathscr{H}_{\text{Spin}} = \mathbb{C}^2$
- ★ Orts– und Spinfreiheitsgrad: $\mathscr{H}_{\text{O,S}} = L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}^2$, wobei $n = 1, 2, 3$

Mehrteilchenprobleme

- ★ Ortsfreiheitsgrad: $\mathscr{H}^{\otimes \text{N}}_{\text{Ort}} = \mathscr{H}^{(1)}_{\text{Ort}} \otimes \mathscr{H}^{(2)}_{\text{Ort}} \otimes \mathscr{H}^{(3)}_{\text{Ort}} \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}^{(\text{N})}_{\text{Ort}}$
  wobei $\mathscr{H}^{(\text{k})}_{\text{Ort}} = L^2_{(\text{k})}(\mathbb{R}^n)$ mit $n = 1, 2, 3$
- ★ Spinfreiheitsgrad: $\mathscr{H}^{\otimes \text{N}}_{\text{Spin}} = \mathscr{H}^{(1)}_{\text{Spin}} \otimes \mathscr{H}^{(2)}_{\text{Spin}} \otimes \mathscr{H}^{(3)}_{\text{Spin}} \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}^{(\text{N})}_{\text{Spin}}$
  wobei $\mathscr{H}^{(\text{k})}_{\text{Spin}} = \mathbb{C}^2_{(\text{k})}$
- ★ Orts– und Spinfreiheitsgrad: $\mathscr{H}^{\otimes \text{N}}_{\text{O,S}} = \mathscr{H}^{\otimes \text{N}}_{\text{Ort}} \otimes \mathscr{H}^{\otimes \text{N}}_{\text{Spin}}$

N–Teilchensysteme mit Spin $S = 0, 1, 2, \ldots$ (Identische Teilchen)

- ★ **Bose–Einstein Statistik:** Total symmetrische Zustände
  Einteilchenzustände können beliebig oft besetzt werden
  "Bose–Einstein Kondensat" bei tiefen Temperaturen

N–Teilchensysteme mit Spin $S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \ldots$ (Identische Teilchen)

- ★ **Fermi–Dirac Statistik:** Total anti–symmetrische Zustände
  Pauli Verbot: Einteilchenzustände dürfen höchstens einmal besetzt werden