Quantenmechanik: Mathematischer Formalismus

Separabler komplexer Hilbertraum: $\mathscr{H} = \{f, g, \dots\}$

1. Vektorraum:	$f + g \in \mathscr{H} \quad \alpha \, . \, f \in \mathscr{H} \quad \alpha \in \mathbb{C}$
2. Skalarprodukt:	$\langle f \, , \, g \rangle \in \mathbb{C}$
3. Vollständigkeit:	wenn **jede** Cauchy-Folge **in** $\mathscr{H}$ konvergiert
4. Separabilität:	wenn $\mathscr{H}$ eine abzählbare, überall dichte Teilmenge $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ besitzt

Skalarprodukt:

(1) $\langle f \, , \, f \rangle > 0 \qquad \forall f \in \mathscr{H}, f \neq 0$

(2) $\langle f \, , \, g \rangle = \langle g \, , \, f \rangle^*$

(3) $\langle f \, , \, \alpha g \rangle = \alpha \langle f \, , \, g \rangle$

(4) $\langle f \, , \, g + h \rangle = \langle f \, , \, g \rangle + \langle f \, , \, h \rangle$

$(2) + (3) \Longrightarrow \langle \alpha f \, , \, g \rangle = \alpha^* \langle f \, , \, g \rangle$

Norm:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f \, , \, f \rangle} \Longrightarrow |\langle f \, , \, g \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \, \|g\|^2$$

Metrik:

$$d(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\langle f - g \, , \, f - g \rangle}$$

Cauchy-Folge: Eine Folge $f_1, f_2, \dots$ heisst Cauchy-Folge, wenn für **jedes** $\epsilon > 0$ ein $M(\epsilon) > 0$ existiert, so dass

$$d(f_m, f_n) = \|f_m - f_n\| < \epsilon \qquad \forall m, n > M(\epsilon)$$

Überall dichte Teilmenge: $\boldsymbol{\mathcal{S}} \subset \mathscr{H}$ heisst dicht in $\mathscr{H}$, wenn für **jedes** $\epsilon > 0$ und **jedes** $f \in \mathscr{H}$ ein Element $s_n \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$ existiert, so dass gilt $\quad d(f, s_n) < \epsilon$

Satz: In jedem separablen Hilbertraum $\mathscr{H}$ gibt es ein vollständiges Orthonormalsystem $E = \{e_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$ von abzählbar unendlich vielen Elementen

Orthonormalsystem E: Vollständigkeit von E ist nicht zu verwechseln mit Vollständigkeit von $\mathscr{H}$

$$\boxed{f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle e_j \, , \, f \rangle \, e_j \qquad \forall f \in \mathscr{H}}$$

$\langle e_j \, , \, f \rangle$ = Fourierkoeffizient

Beachte: $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle e_j \, , \, f \rangle \, e_j \not\Longrightarrow f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle e_j \, , \, f \rangle \, e_j(x)$

dh. aus der Konvergenz im Mittel folgt **nicht** die punktweise Konvergenz: zB. **Gibb'sches Phänomen**

Beispiele: Separable Hilberträume

Beispiel 1:

Hilbertraum: $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$

Vektorraum: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Skalarprodukt: $\langle f \, , g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \; f(x)^* \; g(x)$

Orthonormalsystem: $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}_0^+\}$

$e_n(x) = N_n \, e^{-x^2/2} \, H_n(x)$

$e_n(x) \ldots$ Hermit'sche Basisfunktionen

$H_m(x) \ldots$ Hermitepolynome

$N_n = \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}} \ldots$ Normierungskonstanten

Beispiel 2:

Hilbertraum: $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{L})$

Periodische RB: $\boxed{f(x+L) = f(x)}$

Vektorraum: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

Skalarprodukt: $\langle f \, , g \rangle = \int_0^L dx \; f(x)^* \; g(x)$

Orthonormalsystem: $\{e_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$

$e_j(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\{i \frac{2\pi}{L} j x\}$

$e_j(x) \ldots$ Fourier'sche Basisfunktionen

Beispiel 3:

Hilbertraum: $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$

Vektorraum: $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$

$(\alpha f)(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

Skalarprodukt: $\langle f \, , g \rangle = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{x} \; f(\mathbf{x})^* \; g(\mathbf{x})$

Orthonormalsystem: $\{e_{n_1,n_2,n_3} \mid n_j \in \mathbb{Z}^+\}$

$e_{n_1,n_2,n_3}(\mathbf{x}) = e_{n_1}(x_1) \, e_{n_2}(x_2) \, e_{n_3}(x_3)$

$e_{n_j}(x_j) = N_{n_j} \, e^{-x_j^2/2} \, H_{n_j}(x_j)$

$e_{n_j}(x_j) \ldots$ Hermit'sche Basisfunktionen

$H_m(x_j) \ldots$ Hermitepolynome

$N_{n_j} = \sqrt{2^{n_j} n_j! \sqrt{\pi}} \ldots$ Normierungskonstanten

Lineare Operatoren mit dichtem Definitionsbereich

Annahme: $\mathscr{H}$ = separabler Hilbertraum

OPERATOR:
$\mathbf{A} : \mathscr{D}_{\mathbf{A}} \longrightarrow \mathscr{R}_{\mathbf{A}}$
$\mathscr{D}_{\mathbf{A}} \subseteq \mathscr{H}$ = Definitionsbereich von $\mathbf{A}$
$\mathscr{R}_{\mathbf{A}} \subseteq \mathscr{H}$ = Wertebereich von $\mathbf{A}$

Beachte: $\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ und $\mathscr{R}_{\mathbf{A}}$ sind lineare Unterräume von $\mathscr{H}$, ia. aber **nicht** abgeschlossen

Linearer Operator: $\mathbf{A}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathbf{A} f + \beta \mathbf{A} g \qquad f, g \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Dichter Definitionsbereich:

$$\boxed{\overline{\mathscr{D}_{\mathbf{A}}} = \mathscr{H}}$$

Beachte: $\overline{\mathscr{D}_{\mathbf{A}}} = \mathscr{H} \Longleftrightarrow$ das einzige zu allen $f \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ orthogonale Element ist das 0–Element (Null–Funktion, Null–Vektor)

Definitionsbereich von A: $\mathscr{D}_{\mathbf{A}} = \left\{ f \in \mathscr{H} \,\middle|\, \mathbf{A} f \in \mathscr{H} \right\}$

Wertebereich von A: $\mathscr{R}_{\mathbf{A}} = \left\{ \mathbf{A} f \in \mathscr{H} \,\middle|\, f \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}} \right\}$

Bezeichnungsweise:
$\mathscr{D}_{\mathbf{A}} \subset \mathscr{H} \longleftrightarrow$ **IN**
$\mathscr{D}_{\mathbf{A}} = \mathscr{H} \longleftrightarrow$ **AUF**

Verschiedene Typen von linearen Operatoren

Annahme: Jeder im folgenden vorkommende Operator hat einen dichten Definitionsbereich

Beschränkter Operator:

$\|\mathbf{A}\| = Sup_{f\in\mathscr{D}_{\mathbf{A}},\|f\|=1}\|\mathbf{A}f\| \Longleftrightarrow \|\mathbf{A}f\| = a\|f\| \qquad a \in \mathbb{R}^+ \quad \forall f \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}}$

$\|\mathbf{A}\| < +\infty \longleftrightarrow$ beschränkt

Beachte: Da $\overline{\mathscr{D}_{\mathbf{A}}} = \mathscr{H}$ kann der Definitionsbereich des beschränkten Operators auf $\mathscr{H}$ erweitert werden. Dies gilt aber nur für beschränkte Operatoren.

Stetiger Operator:

$\mathbf{A}$ heisst stetig an der Stelle $f \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}}$, wenn für **jede** Cauchy-Folge $\{f_1, f_2, \ldots\}$ mit $f_j \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ und $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ gilt: $\lim_{j\to\infty} \mathbf{A}f_j = \mathbf{A}f$

Satz: Ein Operator $\mathbf{A}$ ist entweder an **jeder** Stelle $f \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ **stetig** oder an **keiner** Stelle.

Adjungierter Operator:

$\mathbf{A} \longmapsto \mathbf{A}^\dagger$

$\langle f\,,\mathbf{A}g\rangle = \langle \mathbf{A}^\dagger f\,, g\rangle \qquad \forall g \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}} \wedge \forall f \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}^\dagger}$

$\mathscr{D}_{\mathbf{A}^\dagger} =$ Menge aller $f \in \mathscr{H}$ für die ein $\hat{f} = \hat{f}(\mathbf{A}, f)$ existiert, so dass $\forall g \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ gilt: $\langle \hat{f}\,, g\rangle = \langle f\,,\mathbf{A}g\rangle$

Beachte: Für $\mathscr{D}_{\mathbf{A}^\dagger} \neq \emptyset$ ist $\overline{\mathscr{D}_{\mathbf{A}}} = \mathscr{H}$ Vorausetzung, aber aus $\overline{\mathscr{D}_{\mathbf{A}}} = \mathscr{H}$ folgt **nicht** $\overline{\mathscr{D}_{\mathbf{A}^\dagger}} = \mathscr{H}$

Symmetrischer Operator:

$\langle f\,,\mathbf{A}g\rangle = \langle \mathbf{A}f\,, g\rangle \qquad \forall f, g \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}} \wedge \overline{\mathscr{D}_{\mathbf{A}}} = \mathscr{H}$

$\mathbf{A}^\dagger \supseteq \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A} \qquad$ in $\mathscr{D}_{\mathbf{A}}$ **aber** $\mathscr{D}_{\mathbf{A}^\dagger} \supseteq \mathscr{D}_{\mathbf{A}}$

Selbstadjungierter Operator:

$\mathbf{A}^\dagger f = \mathbf{A}f \qquad \forall f \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}} = \mathscr{D}_{\mathbf{A}^\dagger}$

(1) $\mathbf{A} =$ symmetrisch

(2) $(\mathbf{A} \pm i\mathbf{1})\mathscr{D}_{\mathbf{A}} = \mathscr{H} = \mathscr{R}_{\mathbf{A}\pm i\mathbf{1}}$

$$\boxed{\mathscr{D}_{\mathbf{A}} = \mathscr{D}_{\mathbf{A}^\dagger} \wedge \mathbf{A}^\dagger f = \mathbf{A}f \quad \forall f \in \mathscr{D}_{\mathbf{A}} \wedge \overline{\mathscr{D}_{\mathbf{A}^\dagger}} = \mathscr{H}}$$

Algebra von Operatoren: $\boldsymbol{\mathcal{A}}^\star$

(1)	$(\mathbf{A}+\mathbf{B})f$	$=$	$\mathbf{A}f+\mathbf{B}f$	$f\in\mathscr{D}_\mathbf{A}\cap\mathscr{D}_\mathbf{B}$
(2)	$(\alpha\,\mathbf{A})f$	$=$	$\alpha\,\mathbf{A}f$	$f\in\mathscr{D}_\mathbf{A}$
(3)	$(\mathbf{A}\mathbf{B})f$	$=$	$\mathbf{A}(\mathbf{B}f)$	$f\in\mathscr{D}_\mathbf{B}\ \wedge\ \mathbf{B}f\in\mathscr{D}_\mathbf{A}$

Beachte: Selbst wenn $\overline{\mathscr{D}_\mathbf{A}} = \mathscr{H}$ kann $\mathscr{D}_\mathbf{A}\cap\mathscr{D}_\mathbf{B} = \{\mathbf{0}\}$

$\boldsymbol{\mathcal{A}}^\star$ kann als Vektorraum aufgefasst werden,
wenn man solche Operatoren zulässt,
die auf einer gemeinsamen dichten Teilmenge
definiert sind.

Spezielle Operatoren

Inverser Operator: $\mathbf{A}\longmapsto\mathbf{A}^{-1}$
Der zu $\mathbf{A}$ auf $\mathscr{D}_\mathbf{A}$ inverse Operator $\mathbf{A}^{-1}$ auf $\mathscr{D}_{\mathbf{A}^{-1}}$,
existiert dann und nur dann, wenn
$\mathbf{A}^{-1}f = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ gilt, dh.
$\mathscr{D}_{\mathbf{A}^{-1}} = \mathscr{R}_\mathbf{A} \qquad \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}f) = f \qquad \forall f\in\mathscr{D}_\mathbf{A}$

Unitärer Operator: $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbf{1}$
$\langle Uf\,,Ug\rangle = \langle f\,,g\rangle \qquad \forall f,g\in\mathscr{H} \quad (\Longleftrightarrow \mathscr{D}_U = \mathscr{H})$
Beachte: $\|U\| = 1 \Longleftrightarrow \|f\| = \|Uf\|$

$U:\mathscr{H}\longmapsto\mathscr{H} \qquad (f\longmapsto Uf) \qquad \forall f\in\mathscr{H}$
$U:\boldsymbol{\mathcal{A}}^\star\longmapsto\boldsymbol{\mathcal{A}}^\star \qquad (\mathbf{A}\longmapsto U\mathbf{A}U^\dagger) \qquad \forall\mathbf{A}\in\boldsymbol{\mathcal{A}}^\star$

Normaler Operator: $\mathbf{N}\,\mathbf{N}^\dagger = \mathbf{N}^\dagger\,\mathbf{N}$

Projektionsoperator: $\mathsf{Q}^2 = \mathsf{Q}$ … idempotent
$\mathsf{Q}^\dagger = \mathsf{Q}$ … selbstadjungiert

Spektralzerlegung selbstadjungierter Operatoren $(\overline{\mathscr{D}_{\mathbf{A}}} = \mathscr{H})$

Fall 1: **Reines Punktspektrum:** $\lambda_j \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\mathbf{A} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \lambda_j \, \mathsf{Q}_j}$$

Q_j = Projektionsoperatoren

$$\begin{aligned} \mathsf{Q}_j^{\dagger} &= \mathsf{Q}_j \\ \mathsf{Q}_j \, \mathsf{Q}_\ell &= \delta_{j\ell} \, \mathsf{Q}_j \\ dim \; \mathsf{Q}_j \mathscr{H} &= N_j \leq +\infty \\ \mathbf{1} &= \sum_j \mathsf{Q}_j \iff \mathscr{H} = \sum_j \oplus \, \mathsf{Q}_j \mathscr{H} \end{aligned}$$

Zerlegung der Einheit: $\mathscr{H}$ zerfällt in paarweise orthogonale Unterräume $\mathscr{H}_j = \mathsf{Q}_j \mathscr{H}$

Eigenwert-Gleichung:

$$\boxed{\mathbf{A} \, \phi_{js} = \lambda_j \, \phi_{js}}$$

λ_j $\cdots$ Eigenwerte

ϕ_{js} $\cdots$ orthonormierte Eigenfunktionen

$s = 1, 2, \cdots N_j$ = Entartung von λ_j

Dirac-Schreibweise: $\phi_{js} \longmapsto |\, \phi_{js}\rangle \longleftrightarrow |\, js\rangle$

Projektionsoperatoren: $\mathsf{Q}_j = \sum_{s=1}^{N_j} |\, \phi_{js}\rangle\langle\phi_{js}\,|$

Vollständigkeitsrelation: $\mathbf{1} = \sum_{js} |\, \phi_{js}\rangle\langle\phi_{js}\,|$

Fall 2: **Kontinuierliches Spektrum:** $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\mathbf{B} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \; |\, \lambda\rangle d\lambda\langle\lambda\,|}$$

... Hilbert'scher Spektralsatz

Fall 3: **Kombination von Punkt- und kontinuierlichem Spektrum**

$$\boxed{\mathbf{C} = \sum_j \lambda_j \, \mathsf{Q}_j + \int_a^b \lambda \; |\, \lambda\rangle d\lambda\langle\lambda\,|}$$

Spektralzerlegung unitärer Operatoren $(\mathscr{D}_U = \mathscr{H})$

$$\begin{aligned} UU^{\dagger} = U^{\dagger}U &= \mathbf{1} && \iff && U^{-1} = U^{\dagger} \\ U &= \sum_{\ell=0}^{N-1} \exp\{i\tfrac{2\pi}{N}\ell\} \, \mathsf{Q}_\ell && \Longrightarrow && \|U\| = 1 \\ U &= \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} dE_\varphi && \Longrightarrow && \|U\| = 1 \end{aligned}$$

Beispiel: $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$

Funktionen von $\mathscr{H}$: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad (f(x) \in \mathbb{C})$

Basis von $\mathscr{H}$: $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$

$e_j(x)$ … Hermit'sche Basisfunktionen

$\langle e_j \, , e_\ell \rangle = \delta_{j\ell}$

Impulsoperator: $[\mathbf{P} f](x) = -i\hbar\partial_x f(x) \qquad f \in \mathscr{D}_{\mathbf{P}}$

Ortsoperator: $[\mathbf{X} f](x) = x f(x) \qquad f \in \mathscr{D}_{\mathbf{X}}$

Hamiltonoperator: $\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^2$

Eigenwertgleichung: $\mathbf{H}\, e_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})\, e_n \qquad n \in \mathbb{Z}_0^+$

Beachte: $\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} e_n \in \mathscr{H}$ **aber** $\frac{1}{\hbar\omega}(\mathbf{H} + \frac{1}{2}\mathbf{1})\Phi \notin \mathscr{H}$

Unitäre Operatoren:

(1) $U(t) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}t\right\} \qquad t \in \mathbb{R}$

(2) $U(a) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{P}a\right\} \qquad a \in \mathbb{R}$

(3) $[U f](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \; e^{ixy} \, f(y)$

(4) $\left[U^2 f\right](x) = f(-x)$

$U^2 = V$

$V^\dagger = V \Longleftrightarrow V^2 = \mathbf{1} \Longleftrightarrow$ EWe $= \pm\mathbf{1}$

Projektionsoperatoren: ad Beispiel **(4)**

$\mathsf{Q}_\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm V) \qquad \mathsf{Q}_+\mathsf{Q}_- = \mathsf{Q}_-\mathsf{Q}_+ = \mathbf{O}$

Zerlegung der Einheit: $\mathbf{1} = \mathsf{Q}_+ + \mathsf{Q}_-$

Spektralzerlegung von V: $V = \mathsf{Q}_+ - \mathsf{Q}_-$

Eigenwerte von $\mathsf{Q}_\pm$: EWe $= \mathbf{0}, +\mathbf{1}$

$[\mathsf{Q}_\pm f](x) = \frac{1}{2}\{f(x) \pm f(-x)\} = f_\pm(x)$

$\mathsf{Q}_+\mathsf{Q}_- = \mathbf{O} \Longleftrightarrow \langle f_+ \, , f_- \rangle = 0$

$\mathbf{1} = \mathsf{Q}_+ + \mathsf{Q}_- \Longleftrightarrow f = f_+ + f_-$

Konsequenz: $\mathscr{H} = \mathscr{H}_+ \oplus \mathscr{H}_-$

$\mathscr{H}_\pm = \mathsf{Q}_\pm \mathscr{H}$

$dim\ \mathscr{H}_\pm = \infty$

Separabler Hilbertraum

Matrixdarstellung von Vektoren und Operatoren bzgl. Orthonormalbasen
Berechnung von Matrixelementen, Skalarprodukten und Spuren

Separabler Hilbertraum: $\mathscr{H} \;=\; \{f, g, h, \ldots \mid \langle f \,,\, g\rangle \in \mathbb{C}\,; \;\; \|f\| < \infty\}$

Orthonormalbasis: $E \;=\; \{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$

$$\langle e_m \,,\, e_n\rangle \;=\; \delta_{mn}$$

Matrixdarstellung eines Elements $f \in \mathscr{H}$:

$$f \xrightarrow{\{E\}} \hat{f} \;=\; \hat{f}^{\{E\}}$$

$$f \longmapsto \hat{f} \;=\; \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$f_m \;=\; \langle e_m \,,\, f\rangle$$

$$\boxed{f \;=\; \textstyle\sum_m \langle e_m \,,\, f\rangle\, e_m}$$

Matrixdarstellung eines Operators $\mathbf{A} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}^\star$:

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\{E\}} \hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^{\{E\}}$$

$$\mathbf{A} \longmapsto \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \ldots \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{mn} \;=\; \langle e_m \,,\, \mathbf{A} e_n\rangle$$

$$\boxed{\mathbf{A}\, e_n \;=\; \textstyle\sum_m \mathbf{A}_{mn}\, e_m}$$

Beispiel:

$$\mathbf{A}^\dagger \longmapsto \hat{\mathbf{A}}^\dagger = \left\{\mathbf{A}^\dagger_{mn}\right\} = \left\{\mathbf{A}^*_{nm}\right\}$$

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A} \longmapsto \hat{\mathbf{A}}^\dagger = \hat{\mathbf{A}} \longleftrightarrow \mathbf{A}^\dagger_{mn} = \mathbf{A}_{mn} = \mathbf{A}^*_{nm}$$

$$\boxed{\mathbf{A}^\dagger\, e_n \;=\; \textstyle\sum_m \mathbf{A}^\dagger_{mn}\, e_m}$$

Matrixalgebra:

$$\begin{array}{lllll}
(1)\;\; f + g & \longmapsto & \hat{f} + \hat{g} & \longleftrightarrow \{\hat{f} + \hat{g}\}_m & = \; f_m + g_m \\
(2)\;\; \alpha f & \longmapsto & \alpha \hat{f} & \longleftrightarrow \{\alpha \hat{f}\}_m & = \; \alpha f_m
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
(1)\;\; \mathbf{A} + \mathbf{B} & \longmapsto & \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}} & \longleftrightarrow \{\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}}\}_{mn} & = \; \mathbf{A}_{mn} + \mathbf{B}_{mn} \\
(2)\;\; \alpha \mathbf{A} & \longmapsto & \alpha \hat{\mathbf{A}} & \longleftrightarrow \{\alpha \hat{\mathbf{A}}\}_{mn} & = \; \alpha \mathbf{A}_{mn} \\
(3)\;\; \mathbf{A}\mathbf{B} & \longmapsto & \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} & \longleftrightarrow \{\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\}_{mn} & = \; \sum_\ell \mathbf{A}_{m\ell}\, \mathbf{B}_{\ell n}
\end{array}$$

Berechnung von Skalarprodukten:

$$
\begin{aligned}
\langle f\,,g\rangle &= \textstyle\sum_m \langle f\,,e_m\rangle\langle e_m\,,g\rangle \\
&= \textstyle\sum_m \langle e_m\,,f\rangle^*\langle e_m\,,g\rangle \\
&= \textstyle\sum_m f_m^*\,g_m \\
&= \left[f_1^*,f_2^*,\ldots\right]\begin{bmatrix} g_1\\ g_2\\ \vdots\end{bmatrix} \;=\; \hat{f}^\dagger\,\hat{g}
\end{aligned}
$$

Berechnung von Matrixelementen:

$$
\begin{aligned}
\langle f\,,\mathbf{A}g\rangle &= \textstyle\sum_m \langle f\,,e_m\rangle\langle e_m\,,h\rangle \\
g &= \textstyle\sum_n \langle e_n\,,g\rangle\,e_n \\
h &= \mathbf{A}g \;=\; \textstyle\sum_n \langle e_n\,,g\rangle\,\mathbf{A}e_n \\
\\
\langle f\,,\mathbf{A}g\rangle &= \textstyle\sum_m \underbrace{\langle e_m\,,f\rangle^*}_{f_n^*}\;\textstyle\sum_n \underbrace{\langle e_n\,,g\rangle}_{g_n}\underbrace{\langle e_m\,,\mathbf{A}e_n\rangle}_{\mathbf{A}_{mn}} \\
&= \textstyle\sum_{mn} f_m^*\,\mathbf{A}_{mn}\,g_n \\
&= \left[f_1^*,f_2^*,\ldots\right]\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \ldots\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \ldots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_1\\ g_2\\ \vdots\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} h_1\\ h_2\\ \vdots\end{bmatrix}} \\
&= \hat{f}^\dagger\,\hat{\mathbf{A}}\,\hat{g}
\end{aligned}
$$

Matrixdarstellung von Projektionsoperatoren:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Q} &= \;|\,f\rangle\langle f\,|\;\longmapsto \mathsf{Q}^{\{E\}} \;=\; \hat{f}\,\hat{f}^\dagger \\
f &= \textstyle\sum_m \langle e_m\,,f\rangle\,e_m \\
\mathsf{Q}^{\{E\}} &= \begin{bmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\end{bmatrix}\left[f_1^*,f_2^*,\ldots\right] \\
&= \begin{bmatrix} f_1f_1^* & f_1f_2^* & \ldots\\ f_2f_1^* & f_2f_2^* & \ldots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Mathematische Schreibweise	**Dirac-Schreibweise**
$f \in \mathscr{H}$ $\langle f \,, g \rangle$ $\langle f \,, \alpha g \rangle$ $\langle f \,, \mathbf{A} g \rangle$	$\vert f \rangle \ldots$ **KET** ; $\langle f \vert \ldots$ **BRA** $\langle f \vert g \rangle$ $\langle f \vert \alpha \vert g \rangle$ $\langle f \vert \mathbf{A} \vert g \rangle$
$\langle f \,, \alpha g \rangle = \langle \alpha g \,, f \rangle^* = \alpha \langle f \,, g \rangle$ $\boxed{\alpha g}$	$\langle f \vert \alpha \vert g \rangle = \alpha \langle f \vert g \rangle = \alpha \langle g \vert f \rangle^* = (\langle g \vert \alpha^*) \vert f \rangle^*$ $\boxed{\alpha \vert g \rangle \longleftrightarrow \langle g \vert \alpha^* = \alpha^* \langle g \vert}$
$\Vert f \Vert^2 = \sum_m \vert \langle e_m \,, f \rangle \vert^2 = \langle f \,, f \rangle$	$\langle f \vert f \rangle = \sum_m \vert \langle e_m \vert f \rangle \vert^2 = \sum_m \langle e_m \vert f \rangle^* \langle e_m \vert f \rangle$ $= \sum_m \langle f \vert e_m \rangle \langle e_m \vert f \rangle$ $= \langle f \vert \underbrace{\sum_m \vert e_m \rangle \langle e_m \vert}_{\mathbf{1}-\mathit{Operator}} f \rangle$
Vollständigkeit der Basis $E = \{e_m\}$ $\boxed{\Vert f \Vert^2 = \sum_m \vert \langle e_m \,, f \rangle \vert^2}$ $\langle f \,, g \rangle = \sum_m \langle f \,, e_m \rangle \langle e_m \,, g \rangle$ $\boxed{f = \sum_m \langle e_m \,, f \rangle \, e_m}$	$\boxed{\sum_m \vert e_m \rangle \langle e_m \vert = \mathbf{1}}$ $\langle f \vert g \rangle = \langle f \vert \mathbf{1} \vert g \rangle = \sum_m \langle f \vert e_m \rangle \langle e_m \vert g \rangle$ $\boxed{\vert f \rangle = \mathbf{1} \vert f \rangle = \sum_m \vert e_m \rangle \langle e_m \vert f \rangle}$ $\langle f \vert = \langle f \vert \mathbf{1} = \sum_m \langle f \vert e_m \rangle \langle e_m \vert$ $= \sum_m \langle e_m \vert f \rangle^* \langle e_m \vert$
$\langle f \,, \mathbf{A} g \rangle$ $\langle f \,, \mathbf{A} g \rangle = \langle \mathbf{A}^\dagger f \,, g \rangle = \langle g \,, \mathbf{A}^\dagger f \rangle^*$ $\boxed{\mathbf{A} g}$	$\langle f \vert \mathbf{A} \vert g \rangle$ $\langle f \vert \mathbf{A} \vert g \rangle = \langle g \vert \mathbf{A}^\dagger \vert f \rangle^*$ $\boxed{\mathbf{A} \vert g \rangle \longleftrightarrow (\langle g \vert \mathbf{A}^\dagger)}$
$\langle f \,, \alpha \mathbf{A} g \rangle = \alpha \langle f \,, \mathbf{A} g \rangle = \alpha \langle \mathbf{A}^\dagger f \,, g \rangle$ $\langle \alpha^* \mathbf{A}^\dagger f \,, g \rangle = \langle g \,, \alpha^* \mathbf{A}^\dagger f \rangle^*$ $\boxed{\alpha \mathbf{A} g}$	$\langle f \vert \alpha \mathbf{A} \vert g \rangle = \alpha \langle f \vert \mathbf{A} \vert g \rangle = \langle g \vert \alpha^* \mathbf{A}^\dagger \vert f \rangle^*$ $\boxed{\alpha \mathbf{A} \vert g \rangle \longleftrightarrow \langle g \vert \alpha^* \mathbf{A}^\dagger = \alpha^* \langle g \vert \mathbf{A}^\dagger}$
$\langle f \,, \mathbf{AB} g \rangle = \langle \mathbf{A}^\dagger f \,, \mathbf{B} g \rangle =$ $\langle \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger f \,, g \rangle = \langle g \,, \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger f \rangle^*$ $\boxed{\mathbf{AB} g}$	$\langle f \vert \mathbf{AB} \vert g \rangle = \langle g \vert \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger \vert f \rangle$ $\boxed{\mathbf{AB} \vert g \rangle \longleftrightarrow \langle g \vert \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger}$
$\boxed{\mathit{Spur}\ \mathbf{A} = \sum_m \langle e_m \,, \mathbf{A} e_m \rangle = \sum_m \mathbf{A}_{mm}}$	$\boxed{\mathit{Spur}\ \mathbf{A} = \sum_m \langle e_m \vert \mathbf{A} \vert e_m \rangle = \sum_m \mathbf{A}_{mm}}$