[2] Zeitabhängige Schrödingergleichung:

Zeitabhängige Lösungen, Gebundene Zustände, Stationäre Zustände, Streuzustände, Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 1: Löse die zeitabhängige Schrödingergleichung für ein kräftefreies Teilchen der Masse m (eindimensionales Problem)
(siehe **Grau:** I.14(II) und IV.9)

Natürliche Randbedingungen (Ortsteil): $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \boldsymbol{\psi}(x) \xrightarrow{exp} 0$

1. Wie lautet die zugehörige zeitabhängige Schrödingergleichung?

2. Wie lautet die zugehörige zeitunabhängige Schrödingergleichung?

3. Zeige, daß die Eigenfunktionen von $-\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2$ keine Elemente von $L^2(\mathbb{R})$, d.h. nicht normierbar sind (Normierung auf δ-Funktionen).

4. Gib die Entartung der Eigenwerte E an.

5. Gib eine allgemeine (auf 1 normierte) Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung an.

6. Wie muß die Konstante $c \in \mathbb{R}^+$ der Spektralfunktion

$$f(p) = \begin{cases} c & \cdots \quad x \in [0, L] \\ 0 & \cdots \quad \text{sonst} \end{cases}$$

gewählt werden, daß die zugehörige zeitabhängige Lösung $\psi(x,t)$ auf 1 normiert ist?

7. Berechne $\psi(x,0)$, $|\psi(x,0)|^2$ und diskutiere das Ergebnis im Vergleich zu einem Gaußschen Wellenpaket.

8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen zur Zeit $t = 0$ im Intervall $[0, +\infty)$ zu finden?

9. Kann dieses System gebundene Zustände besitzen?

[2] Zeitabhängige Schrödingergleichung:

Zeitabhängige Lösungen, Gebundene Zustände, Stationäre Zustände, Streuzustände, Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 2: Löse die zeitabhängige Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse m im unendlich tiefen Kastenpotential (eindimensionales Problem)
(siehe **Grau:** II.10)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \dots \quad |x| \leq a \\ \infty & \dots \quad |x| > a \end{cases}$$

Dirichlet Randbedingungen (Ortsteil):	$\lim_{x\to\pm a} \boldsymbol{\psi}(x) = 0$ $\boldsymbol{\psi}(x) = 0 \quad \dots \quad |x| \geq a$

1. Wie lautet die zugehörige zeitabhängige Schrödingergleichung?
2. Wie lautet die zugehörige zeitunabhängige Schrödingergleichung?
3. Zeige, daß die Eigenfunktionen von $-\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2$ spezielle Elemente von $L^2(\mathbb{R})$, d.h. normierbar sind.
4. Normiere die Eigenfunktionen und gib die Entartung der Eigenwerte E an.
5. Gib eine allgemeine (auf 1 normierte) Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung an.
6. Wie muß die Normierungskonstante $N \in \mathbb{R}^+$ der zeitabhängigen Lösung

   $$\psi(x,t) = N\,(u_0(x,t) + i u_1(x,t))$$

   gewählt werden, wobei $u_0(x,t)$ den Grundzustand und $u_1(x,t)$ den ersten angeregten Zustand darstellt, daß die zugehörige zeitabhängige Lösung $\psi(x,t)$ auf 1 normiert ist?
7. Berechne $|\psi(x,t)|^2$ und diskutiere das Ergebnis.
8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen zur Zeit $t > 0$ im Intervall $[0, +a]$ zu finden?
9. Kann dieses System gebundene Zustände besitzen?
10. Kann dieses System nicht–gebundene Zustände besitzen?
11. Zeige, daß der Operator $-i\hbar\partial_x$ **keine** Eigenfunktionen besitzt.

[2] Zeitabhängige Schrödingergleichung:

Zeitabhängige Lösungen, Gebundene Zustände, Stationäre Zustände, Streuzustände, Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 3: Löse die zeitabhängige Schrödingergleichung für ein freies Teilchen der Masse m mit periodischen Randbedingungen (eindimensionales Problem)
(siehe **Grau:** I.14(IV) und I.25)

Periodische Randbedingungen (Ortsteil): $\qquad \boldsymbol{\psi}(x+L) \;=\; \boldsymbol{\psi}(x)$

1. Wie lautet die zugehörige zeitabhängige Schrödingergleichung?

2. Wie lautet die zugehörige zeitunabhängige Schrödingergleichung?

3. Zeige, daß die (normierten) Eigenfunktionen von $-i\hbar\partial_x$ und damit von $-\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2$ ein vollständiges Funktionensystem von $L^2(-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2})$ bilden.

4. Normiere die Eigenfunktionen und gib die Entartung der Eigenwerte E an.

5. Gib eine allgemeine (auf 1 normierte) Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung an.

6. Wie muß die Normierungskonstante $N \in \mathbb{R}^+$ der zeitabhängigen Lösung

$$\psi(x,t) = N\left(u_0(x,t) + i\sqrt{3}\left\{u_{-1}(x,t) - \sqrt{2}u_{+1}(x,t)\right\}\right)$$

   gewählt werden, wobei $u_0(x,t)$ den Grundzustand und $u_{\pm 1}(x,t)$ die beiden ersten angeregten Zustände darstellt, daß die zugehörige zeitabhängige Lösung $\psi(x,t)$ auf 1 normiert ist?

7. Berechne $|\psi(x,t)|^2$ und diskutiere das Ergebnis.

8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen zur Zeit $t > 0$ im Intervall $[0, +\frac{L}{2}]$ zu finden?

9. Kann dieses System gebundene Zustände besitzen?

10. Zeige, daß man Eigenfunktionen von $-\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2$ angeben kann, die **keine** Eigenfunktionen von $-i\hbar\partial_x$ sind.

[2] Zeitabhängige Schrödingergleichung:

Zeitabhängige Lösungen, Gebundene Zustände, Stationäre Zustände, Streuzustände, Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 4: Vergleiche die stationären Zustände eines Teilchens der Masse m im ∞-tiefen Kastenpotential (Kastenbreite $= L$) mit den stationären Zuständen eines freien Teilchens der Masse m mit periodischen Randbedingungen (Periodizitätsintervall $= L$).
(siehe **Grau:** II.10 und I.25)

1. Gib die orthonormierten stationären Zustände eines Teilchens der Masse m für das unendlich tiefe Kastenpotential an (Breite $= L$).

2. Gib die Entartung der Eigenwerte E_n an.

3. Skizziere die Aufenthaltwahrscheinlichkeiten $|u_1(x,t)|^2$ und $|u_2(x,t)|^2$.

4. Gib einen vollständigen Satz von orthonormierten stationären Zuständen eines Teilchens der Masse m für periodische Randbedingungen an (Periodizitätsintervall $= L$).

5. Zeige, daß für $n \neq 0$ mit

$$\begin{aligned} w_{n,1}(x,t) &= A\, u_n(x,t) - B^*\, u_{-n}(x,t) \\ w_{n,2}(x,t) &= B\, u_n(x,t) + A^*\, u_{-n}(x,t) \qquad n \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

   die allgemeinste Form der orthonormierten stationären Zustände definiert ist, wenn die Bedingung $|A|^2 + |B|^2 = 1$ erfüllt ist und $u_{\pm n}(x,t)$ ebene Wellen darstellen.

6. Berechne $|u_0(x,t)|^2$ und $|w_{n,1}(x,t)|^2$ und $|w_{n,2}(x,t)|^2$ für $n = 1$ und skizziere diese drei Funktionen, wobei

$$\begin{aligned} A &= \cos\xi\, e^{i\alpha} \\ B &= \sin\xi\, e^{i\beta} \qquad 0 \leq \xi < \pi, \quad 0 \leq \alpha, \beta < 2\pi \end{aligned}$$

   gesetzt werden kann. Kommentiere das Ergebnis.

7. Vergleiche dieses Resultat mit (2) und kommentiere das Ergebnis insbesonders für die beiden entsprechenden Grundzustände.

8. Kommentiere die Bewegung der Teilchen in den entsprechenden klassischen Systemen.

[2] Zeitabhängige Schrödingergleichung:

Zeitabhängige Lösungen, Gebundene Zustände, Stationäre Zustände, Streuzustände, Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 5: Gib stationäre Streuzustände für ein Teilchen der Masse m an, das sich in einem abstoßenden Kastenpotential endlicher Reichweite a und endlicher Höhe V_0 bewegt (eindimensionales Problem)
(siehe **Grau:** II.20)

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \cdots \quad 0 \leq x \leq a \\ 0 & \cdots \quad x < 0 \quad \text{und} \quad x > a \end{cases}$$

1. Wie lautet die zugehörige zeitunabhängige Schrödingergleichung, wenn für den Eigenwert die Bedingung $0 < E < V_0$ angenommen ist? Verwende für die stationären Streuzustände den folgenden allgemeinen Ansatz:

$$u(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \begin{cases} A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} & -\infty < x < 0 \\ A_2 e^{\kappa x} + B_2 e^{-\kappa x} & 0 \leq x \leq a \\ A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx} & a < x < +\infty \end{cases}$$

   wobei die Größen k und κ entsprechend zu identifizieren sind. Setze $E = \alpha V_0$ mit $0 < \alpha < 1$.

2. Gib die Stetigkeitsbedingungen für die gesuchten Koeffizienten A_j, B_j mit $j = 1, 2, 3$ in Form von Matrixgleichungen der folgenden Gestalt an

$$\begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(x_j) \begin{bmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{bmatrix}$$

   wobei mit $x_1 = 0$ und $x_2 = a$ die Sprungstellen des Potentials bezeichnet werden.

3. Stelle die entsprechende **Transfermatrix** $\mathbf{M}(x_1, x_2)$, die $[A_1, B_1]^{\mathrm{T}}$ mit $[A_3, B_3]^{\mathrm{T}}$ verknüpft, als Produkt der Matrizen $\mathbf{Q}(x_1)$ und $\mathbf{Q}(x_2)$ dar.

4. Stelle die Matrixelemente der entsprechenden **Streumatrix**, die $[B_1, A_3]^{\mathrm{T}}$ mit $[A_1, B_3]^{\mathrm{T}}$ verknüpft, als Funktion der Matrixelemente $\mathbf{M}_{mn}(x_1, x_2)$ dar.

5. Setze $A_1 = 1$, $B_3 = 0$ und berechne die Koeffizienten B_1 und A_3. Zeige, daß die Unitaritätsbedingung $|B_1|^2 + |A_3|^2 = 1$ erfüllt ist. Gib den Transmissions– und Reflexionskoeffizient an.

6. Kann es für stationäre Streuzustände mit $0 < E < V_0$ sogenannte **Räsonanzeffekte** geben?

7. Zeige, daß die Kontinuumseigenfunktionen $u(\alpha, x)$ für $0 < E < V_0$ nicht normierbar sind.

8. Gib einen allgemeinen (auf 1 normierten) zeitabhängigen Streuzustand für diese System an.

[2] Zeitabhängige Schrödingergleichung:

Zeitabhängige Lösungen, Gebundene Zustände, Stationäre Zustände, Streuzustände, Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 6: Gib stationäre Streuzustände für ein Teilchen der Masse m an, das sich in einem abstoßenden Kastenpotential endlicher Reichweite a und endlicher Höhe V_0 bewegt (eindimensionales Problem)
(siehe **Grau:** II.20)

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \cdots \quad 0 \leq x \leq a \\ 0 & \cdots \quad x < 0 \quad \text{und} \quad x > a \end{cases}$$

1. Wie lautet die zugehörige zeitunabhängige Schrödingergleichung, wenn für den Eigenwert die Bedingung $0 < V_0 < E$ angenommen ist? Verwende für die stationären Streuzustände den folgenden allgemeinen Ansatz:

$$u(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \begin{cases} A_1 e^{ikx} + B_1\, e^{-ikx} & -\infty < x < 0 \\ A_2\, e^{iKx} + B_2\, e^{-iKx} & 0 \leq x \leq a \\ A_3\, e^{ikx} + B_3\, e^{-ikx} & a < x < +\infty \end{cases}$$

   wobei die Größen k und K entsprechend zu identifizieren sind. Setze $E = \beta V_0$ mit $1 < \beta$.

2. Gib die Stetigkeitsbedingungen für die gesuchten Koeffizienten A_j, B_j mit $j = 1, 2, 3$ in Form von Matrixgleichungen der folgenden Gestalt an

$$\begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(x_j) \begin{bmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{bmatrix}$$

   wobei mit $x_1 = 0$ und $x_2 = a$ die Sprungstellen des Potentials bezeichnet werden.

3. Stelle die entsprechende **Transfermatrix** $\mathbf{M}(x_1, x_2)$, die $[A_1, B_1]^{\mathrm{T}}$ mit $[A_3, B_3]^{\mathrm{T}}$ verknüpft, als Produkt der Matrizen $\mathbf{Q}(x_1)$ und $\mathbf{Q}(x_2)$ dar.

4. Stelle die Matrixelemente der entsprechenden **Streumatrix**, die $[B_1, A_3]^{\mathrm{T}}$ mit $[A_1, B_3]^{\mathrm{T}}$ verknüpft, als Funktion der Matrixelemente $\mathbf{M}_{mn}(x_1, x_2)$ dar.

5. Setze $A_1 = 1$, $B_3 = 0$ und berechne die Koeffizienten B_1 und A_3. Zeige, daß die Unitaritätsbedingung $|B_1|^2 + |A_3|^2 = 1$ erfüllt ist. Gib den Transmissions– und Reflexionskoeffizient an.

6. Kann es für stationäre Streuzustände mit $0 < V_0 < E$ sogenannte **Räsonanzeffekte** geben?

7. Zeige, daß die Kontinuumseigenfunktionen $u(\alpha, x)$ für $0 < V_0 < E$ nicht normierbar sind.

8. Gib einen allgemeinen (auf 1 normierten) zeitabhängigen Streuzustand für diese System an.

[2] Zeitabhängige Schrödingergleichung:

Zeitabhängige Lösungen, Gebundene Zustände, Stationäre Zustände, Streuzustände, Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 7: Löse die zeitabhängige Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse m im unendlich tiefen Kastenpotential durch Vorgabe eines Anfangszustandes (eindimensionales Problem) (siehe **Grau:** II.10)

$$V(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \cdots \quad -\pi \leq x \leq \pi \\ \infty & \cdots \quad x < -\pi \quad \text{und} \quad x > \pi \end{cases}$$

1. Gib die Eigenwerte E_n und die zugehörigen orthonormierten Eigenfunktionen $u_n(x)$ der zeitunabhängigen Schrödingergleichung an.

2. Gib eine allgemeine (auf 1 normierte) Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung an.

3. Gegeben ist zur Zeit $t = 0$ die Wellenfunktion

$$\psi(x,0) \;=\; \begin{cases} N(1+\cos 9x) & \ldots \quad -\frac{\pi}{9} \leq x \leq \frac{\pi}{9} \\ 0 & \ldots \quad \text{sonst} \end{cases}$$

   Wähle die Normierungskonstante N so daß der Anfangszustand $\psi(x,0)$ auf eins normiert ist. Verwende dabei

$$\int_{-\pi/M}^{+\pi/M} dx\; (1+\cos Mx)^2 \;=\; \frac{3\pi}{M}$$

4. Berechne die Entwicklungskoeffizienten $w_n : n \in \mathbb{Z}^+$ des Anfangszustandes $\psi(x,0)$ bezüglich der Energieeigenfunktionen $u_n(x) : n \in \mathbb{Z}^+$

$$\psi(x,0) \;=\; \textstyle\sum_n w_n\, u_n(x)$$

   Verwende dabei die folgende Integralformel

$$\int_{-\pi/M}^{+\pi/M} dx\; (1+\cos Mx)\cos nx \;=\; -\,\frac{2M^2 \sin(n\pi/M)}{n(n+M)(n-M)} \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

   und die Orthogonalitätsrelation der Energieeigenfunktionen.

5. Gib die zeitabhängige Lösung $\psi(x,t)$ für $t > 0$ an und kommentiere das Ergebnis.

[2] Zeitabhängige Schrödingergleichung:

Zeitabhängige Lösungen, Gebundene Zustände, Stationäre Zustände, Streuzustände, Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 8: Löse die zeitabhängige Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse m im unendlich tiefen Kastenpotential (eindimensionales Problem)
(siehe **Grau:** II.10)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \ldots \quad 0 \leq x \leq a \\ \infty & \ldots \quad x < 0 \quad \text{und} \quad x > a \end{cases}$$

1. Wie lautet die zugehörige zeitabhängige Schrödingergleichung?

2. Wie lautet die zugehörige zeitunabhängige Schrödingergleichung?

3. Zeige, daß die Eigenfunktionen von $-\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2$ spezielle Elemente von $L^2(\mathbb{R})$, d.h. normierbar sind. Kann beim Auffinden der Eigenfunktionen das Symmetrieargument mit dem Paritätsoperator noch verwendet werden?

4. Normiere die Eigenfunktionen und gib die Entartung der Eigenwerte E an.

5. Gib eine allgemeine (auf 1 normierte) Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung an.

6. Wie muß die Normierungskonstante $N \in \mathbb{R}^+$ der zeitabhängigen Lösung

   $$\psi(x,t) = N\,(2\,u_1(x,t) + 3i\,u_3(x,t))$$

   gewählt werden, wobei $u_1(x,t)$ den Grundzustand und $u_3(x,t)$ den zweiten angeregten Zustand darstellt, daß die zugehörige zeitabhängige Lösung $\psi(x,t)$ auf 1 normiert ist?

7. Berechne $|\psi(x,t)|^2$ und diskutiere das Ergebnis.

8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen zur Zeit $t > 0$ im Intervall $[0, \frac{a}{4})$ zu finden?

9. Kann dieses System nicht–gebundene Zustände besitzen?

[2] Zeitabhängige Schrödingergleichung:

Zeitabhängige Lösungen, Gebundene Zustände, Stationäre Zustände, Streuzustände, Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 9: Löse die zeitabhängige Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse m, das sich in einem Potential $V(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ bewegt, das ein δ-Potential enthält (eindimensionales Problem) (siehe **Grau:** II.11 und II.12)

$$V(x) \; = \; -\tfrac{\hbar^2}{m} D\,\delta(x - x_0) + V_1(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

1. Wie lautet die zugehörige zeitunabhängige Schrödingergleichung?

2. Nimm an, daß $V_1(x)$ ein in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ stetiges Potential darstellt. Zeige, daß unter der Annahme der Stetigkeit der Wellenfunktion in der Umbegung von $x = x_0$, dh. $u(x_0-) \; = \; u(x_0+) \equiv u(x_0)$, die erste Ableitung der Wellenfunktion an $x = x_0$ einen durch

$$u'(x_0-) \; = \; u'(x_0) + 2Du(x_0)$$

gegebenen Sprung besitzen muß. Anleitung: Integriere die zeitabhängige Schrödingergleichung über ein Intervall $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$ und führe den Grenzübergang $\epsilon \longmapsto 0+$ durch.

3. Löse die zeitunabhängige Schrödingergleichung für $E < 0$ unter der Annahme, daß $V_1(x) \; = \; 0$ für $\forall x \in \mathbb{R}$ und $D > 0$. Zeige, daß es nur **einen** gebundenen Zustand gibt.

4. Berechne den Energieeigenwert des gebundenen Zustandes und die zugehörige auf 1 normierte Eigenfunktion.

5. Wie lautet der zugehörige stationäre Zustand?

6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Intervall $[0, 2D]$ zu finden, wenn es sich im stationären Zustand befindet?

7. Skizziere die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|u(x,t)|^2$ für den gebundenen Zustand.

[2] Zeitabhängige Schrödingergleichung:

Zeitabhängige Lösungen, Gebundene Zustände, Stationäre Zustände, Streuzustände, Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 10: Gib die stationären gebundenen Zustände für ein Teilchen der Masse m an, das sich in einem anziehenden Kastenpotential endlicher Reichweite $2a$ und endlicher Tiefe $V_0 > 0$ bewegt (eindimensionales Problem)
(siehe **Grau:** II.13 und II.20)

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \dots \quad -a \leq x \leq +a \qquad (V_0 > 0) \\ 0 & \dots \quad x < -a \quad \text{und} \quad a < x \end{cases}$$

1. Wie lautet die zugehörige zeitunabhängige Schrödingergleichung, wenn für den Eigenwert die Bedingung $-V_0 < E < 0$ angenommen ist?
2. Leite die Eigenwertbedingung für die gebundenen Zustände ab.
3. Wieviele gebundene Zustände müssen in jedem Fall existieren?
4. Welche Bedingungen muß V_0 erfüllen, damit höchstens ein, oder höchstens zwei, oder höchstens drei Eigenwerte existieren?
5. Gib die zugehörigen Eigenfunktionen explizit an und deute an wie man vorzugehen hat, wenn man die Zustände auf 1 normieren will.
6. Nimm an, daß V_0 so gewählt ist, daß drei Eigenwerte existieren. Skizziere die zugehörigen Eigenfunktionen.
7. Gib einen allgemeinen (auf 1 normierten) zeitabhängigen gebundenen Zustand für diese System explizit an.

[2] Zeitabhängige Schrödingergleichung:

Zeitabhängige Lösungen, Gebundene Zustände, Stationäre Zustände, Streuzustände, Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 11: Gib stationäre Streuzustände für ein Teilchen der Masse m an, das sich in einem abstoßenden Kastenpotential endlicher Reichweite a und endlicher Tiefe V_0 bewegt (eindimensionales Problem)
(siehe **Grau:** II.20)

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \cdots \quad 0 \le x \le a \\ 0 & \cdots \quad x < 0 \quad \text{und} \quad x > a \end{cases}$$

1. Wie lautet die zugehörige zeitunabhängige Schrödingergleichung, wenn für den Eigenwert die Bedingung $0 < E$ angenommen ist? Verwende für die stationären Streuzustände den folgenden allgemeinen Ansatz:

$$u(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \begin{cases} A_1 e^{ikx} + B_1\, e^{-ikx} & -\infty < x < 0 \\ A_2\, e^{iKx} + B_2\, e^{-iKx} & 0 \le x \le a \\ A_3\, e^{ikx} + B_3\, e^{-ikx} & a < x < +\infty \end{cases}$$

   wobei die Größen k und K entsprechend zu identifizieren sind. Setze $E = \beta V_0$ mit $0 < \beta$.

2. Gib die Stetigkeitsbedingungen für die gesuchten Koeffizienten A_j, B_j mit $j = 1, 2, 3$ in Form von Matrixgleichungen der folgenden Gestalt an

$$\begin{bmatrix} A_j \\ B_j \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(x_j) \begin{bmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{bmatrix}$$

   wobei mit $x_1 = -a$ und $x_2 = +a$ die Sprungstellen des Potentials bezeichnet werden.

3. Stelle die entsprechende **Transfermatrix** $\mathbf{M}(x_1, x_2)$, die $[A_1, B_1]^{\mathrm{T}}$ mit $[A_3, B_3]^{\mathrm{T}}$ verknüpft, als Produkt der Matrizen $\mathbf{Q}(x_1)$ und $\mathbf{Q}(x_2)$ dar.

4. Stelle die Matrixelemente der entsprechenden **Streumatrix**, die $[B_1, A_3]^{\mathrm{T}}$ mit $[A_1, B_3]^{\mathrm{T}}$ verknüpft, als Funktion der Matrixelemente $\mathbf{M}_{mn}(x_1, x_2)$ dar.

5. Setze $A_1 = 1$, $B_3 = 0$ und berechne die Koeffizienten B_1 und A_3. Zeige, daß die Unitaritätsbedingung $|B_1|^2 + |A_3|^2 = 1$ erfüllt ist. Gib den Transmissions– und Reflexionskoeffizient an.

6. Kann es für stationäre Streuzustände mit $0 < E$ sogenannte **Räsonanzeffekte** geben?

7. Zeige, daß die Kontinuumseigenfunktionen $u(\alpha, x)$ für $0 < E$ nicht normierbar sind.

8. Gib einen allgemeinen (auf 1 normierten) zeitabhängigen Streuzustand für diese System an.

[2] Zeitabhängige Schrödingergleichung:

Zeitabhängige Lösungen, Gebundene Zustände, Stationäre Zustände, Streuzustände, Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 12: Gib stationären Streuzustände für ein Teilchen der Masse m an, das sich in einer abstoßenden Potentialstufe bewegt (eindimensionales Problem)
(siehe **Grau:** II.20)

$$V(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \ldots \quad x < 0 \\ V_0 & \ldots \quad 0 \leq x \leq a \\ 2V_0 & \ldots \quad a < x \end{cases} \qquad (V_0 > 0)$$

1. Wie lautet die zugehörige zeitunabhängige Schrödingergleichung, wenn für den Eigenwert die Bedingung $3V_0 \;=\; E$ angenommen ist und wenn für stationäre Streuzustände der folgende Ansatz (von links nach rechts einlaufende Teilchen) verwendet wird:

$$u(x,t) \;=\; e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \begin{cases} e^{ikx} + R\,e^{-ikx} & -\infty < x < 0 \\ A\,e^{iKx} + B\,e^{-iKx} & 0 \leq x \leq a \\ S\,e^{iLx} & a < x < \infty \end{cases}$$

   wobei k, K, und L entsprechend zu identifizieren sind.

2. Berechne die Koeffizienten R, A, B, S und zeige, daß die entsprechend verallgemeinerte Unitaritätsbedingung $|R|^2 + \frac{L}{k}|S|^2 \;=\; 1$ erfüllt ist.

3. Berechne die entsprechende **Transfermatrix** und entsprechende **Streumatrix**.

4. Zeige, daß der Transmissionskoeffizient je nach der Größe von $V_0 a^2$ einen Wert zwischen den Grenzen $2(2\sqrt{3} - 3)$ und $8(7\sqrt{3} - 12)$ besitzt.

5. Zeige, daß die Kontinuumseigenfunktionen $u_{\text{Streu}}(x)$ nicht normierbar sind.

6. Vergleiche die Koeffizienten R und S aus (2) mit den entsprechenden Koeffizienten R und S aus (6) und kommentiere das Ergebnis.