[6] Drehimpuls – Kopplungen:

Bahndrehimpulszustände – Spinzustände – Gesamtdrehimpulszustände

Beispiel 1: Betrachtet wird ein System von einem Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchen, das sich in 3 Raumdimensionen bewegt. Der zugehörige Hilbertraum lautet $\mathscr{H}_{\text{Gesamt}} = \mathscr{H}_{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{H}_{\text{Spin}} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$, wobei $\mathscr{H}_{\text{Bahn}}$ den Bahnfreiheitsgrad und $\mathscr{H}_{\text{Spin}}$ den Spinfreiheitsgrad des Teilchens beschreibt. Dabei wird angenommen, dass $\{\,|\,n\ell m\rangle : n \in \mathbb{Z}^+ \;;\; \ell \in \mathbb{Z}_0^+ \;;\; -\ell \le m \le +\ell\}$ eine Standardbasis von Bahndrehimpulseigenzuständen, also von $\vec{\mathbf{L}}^2$ und $\mathbf{L}_z$ darstellt, bzw $\{\,|\,s\rangle = |\,\frac{1}{2}, s\rangle : s = \pm\frac{1}{2}\}$ eine Standardbasis von Spineigenzuständen, also von $\vec{\mathbf{S}}^2$ und $\mathbf{S}_z$ darstellt.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}\,|\,n\ell m\rangle &= X(n)\,|\,n\ell m\rangle \\
\vec{\mathbf{L}}^2\,|\,n\ell m\rangle &= \hbar^2\ell(\ell+1)\,|\,n\ell m\rangle \\
\mathbf{L}_z\,|\,n\ell m\rangle &= \hbar m\,|\,n\ell m\rangle \\
\vec{\mathbf{S}}^2\,|\,s\rangle &= \hbar^2\tfrac{3}{4}\,|\,s\rangle \\
\mathbf{S}_z\,|\,s\rangle &= \hbar s\,|\,s\rangle
\end{aligned}
$$

1. Berechne eine Standardbasis von Gesamtdrehimpulseigenzuständen, deren Elemente $|\,n(\ell\frac{1}{2})JM\rangle$ gemeinsame Eigenvektoren der paarweise vertauschbaren Operatoren $\mathbf{X}$, $\vec{\mathbf{L}}^2$, $\vec{\mathbf{S}}^2$, $\vec{\mathbf{J}}^2$, $\mathbf{J}_z$ sind, wobei $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}$ anzunehmen ist. Verwende dabei die folgenden Clebsch–Gordan Koeffizienten für $\ell \ge 1$

$$
\begin{aligned}
\langle \ell, M \mp \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\,|\,\ell + \tfrac{1}{2}, M\rangle &= \sqrt{\tfrac{\ell+\frac{1}{2}\pm M}{2\ell+1}} \\
\langle \ell, M \mp \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2}\,|\,\ell - \tfrac{1}{2}, M\rangle &= (-1)^{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}}\sqrt{\tfrac{\ell+\frac{1}{2}\mp M}{2\ell+1}}
\end{aligned}
$$

   da für den Spezialfall $\langle 0, 0; \frac{1}{2}, s\,|\,\frac{1}{2}, s\rangle = 1$ gilt. Mit anderen Worten, die Elemente $|\,n(\ell\frac{1}{2})JM\rangle$ sind als Linearkombinationen der Elemente $|\,n\ell m\rangle \otimes |\,s\rangle$ der Produktbasis darzustellen.

2. Gib explizit die Zustände $|\,n(1\frac{1}{2})\frac{3}{2}\frac{1}{2}\rangle$ und $|\,n(1\frac{1}{2})\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$ als Linearkombination der Elemente $|\,n1m\rangle \otimes |\,s\rangle$ der Produktbasis an.

3. Welche simultanen EW–Gleichungen haben die Elemente $|\,n(\ell\frac{1}{2})JM\rangle$ der Gesamtdrehimpulseigenzustände zu erfüllen?

4. Berechne die Matrixdarstellung des Operators $\lambda(\mathbf{J}_+ + \mathbf{J}_-)$, bezüglich der Basis $\{\,|\,n(\ell\frac{1}{2})JM\rangle\}$ mit $n \in \mathbb{Z}^+$; $\ell \in \mathbb{Z}_0^+$ und der Dreiecksungleichung $|\,\ell - \frac{1}{2}\,| \le J \le \ell + \frac{1}{2}$, wobei weiters $\mathbf{J}_\pm = \mathbf{J}_x \pm i\mathbf{J}_y$ zu verstehen ist.

[6] Drehimpuls – Kopplungen:

Spinzustände – Gesamtdrehimpulszustände

Beispiel 2: Ein Zweiteilchen–System besteht aus einem Spin–1–Teilchen und einem Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchen deren räumliche Freiheitsgrade nicht berücksichtigt werden. Der zugehörige Hilbertraum $\mathscr{H}_{\text{Gesamt}} = \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^2$ ist daher 6–dimensional und wird von den orthonormierten Elementen $\big| m_1, m_2 \big\rangle = \big| m_1 \big\rangle^{(1)} \otimes \big| m_2 \big\rangle^{(2)}$ der Produktbasis, die die simultanen Eigenzustände der Operatoren $\mathbf{S}_z^{(1)}$ und $\mathbf{S}_z^{(2)}$ sind aufgespannt, wobei $-1 \leq m_1 \leq +1$ und $m_2 = \pm\frac{1}{2}$ zu verstehen ist. Der Hamiltonoperator des Zweiteilchen–Systems ist durch

$$\boxed{\mathbf{H} = \frac{2\alpha}{\hbar}\left(\mathbf{S}_z^{(1)} + \mathbf{S}_z^{(2)}\right) + \frac{8\beta}{\hbar^2}\,\vec{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \vec{\mathbf{S}}^{(2)}}$$

gegeben, wobei $0 < \alpha < 6\beta \in \mathbb{R}^+$ und $0 < \beta \in \mathbb{R}^+$ angenommen ist. Dabei stellt der Operator $\vec{\mathbf{S}}^{(1)}$ den Spinoperator des Spin–1–Teilchens und $\vec{\mathbf{S}}^{(2)}$ den Spinoperator des Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchens dar.

1. Stelle den Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ als Funktion des Gesamtdrehimpulses (Gesamtspin) $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{S}}^{(1)} + \vec{\mathbf{S}}^{(2)}$ und seiner z–Komponente $\mathbf{S}_z$ dar.

2. Wieviele Eigenwerte kann der Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ maximal haben?

3. Welche sind die möglichen Messwerte für die Energie des Systems?

4. Berechne durch Wahl einer geeigneten Orthonormalbasis die Eigenwerte, ihre Entartung und die zugehörigen Eigenvektoren. Verwende dabei die Clebsch–Gordan Koeffizienten

$$\boxed{\begin{aligned} \big\langle 1, M \mp \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2} \,\big|\, \tfrac{3}{2}, M \big\rangle &= \sqrt{\tfrac{3 \pm 2M}{6}} \\ \big\langle 1, M \mp \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2} \,\big|\, \tfrac{1}{2}, M \big\rangle &= (-1)^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} \sqrt{\tfrac{3 \mp 2M}{6}} \end{aligned}}$$

   um die entsprechenden Elemente $\big| (1\tfrac{1}{2}) S M \big\rangle$ der Standardbasis von Gesamtdrehimpulseigenzuständen zu konstruieren.

5. Gib die Grundzustandsenergie E_0 und den zugehörigen Eigenvektor an.

6. Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der z–Komponente vom Spin–1–Teilchen den Messwert $-\hbar$ zu finden, wenn sich das System im Grundzustand befindet.

7. Nimm an, dass sich das System in einem Zustand befindet, bei dem die z–Komponente des Spin–1–Teilchens den Wert $+\hbar$ und die z–Komponente des Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchens den Wert $-\frac{\hbar}{2}$ hat. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Energiemessung die Grundzustandsenergie ergibt?

[6] Drehimpuls – Kopplungen:

Spinzustände – Gesamtdrehimpulszustände

Beispiel 3: Ein Zweiteilchen–System besteht aus zwei Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchen deren räumliche Freiheitsgrade nicht berücksichtigt werden und nicht als Fermionen betrachtet werden. Der zugehörige Hilbertraum $\mathscr{H}_{\text{Gesamt}} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ ist daher 4–dimensional und wird von den orthonormierten Elementen $|\, m_1, m_2\rangle = |\, m_1\rangle^{(1)} \otimes |\, m_2\rangle^{(2)}$ der Produktbasis, die die simultanen Eigenzustände der Operatoren $\mathbf{S}_z^{(1)}$ und $\mathbf{S}_z^{(2)}$ sind aufgespannt, wobei $m_1 = \pm\frac{1}{2}$ und $m_2 = \pm\frac{1}{2}$ zu verstehen ist. Der Hamiltonoperator des Zweiteilchen–Systems ist durch

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\hbar}\big(\mathbf{S}_z^{(1)} + \mathbf{S}_z^{(2)}\big) + \frac{2}{\hbar^2}\,\vec{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \vec{\mathbf{S}}^{(2)}$$

gegeben. Dabei stellen die Operatoren $\vec{\mathbf{S}}^{(j)}$ mit $j = 1, 2$ die Spinoperatoren der Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchen dar.

1. Stelle den Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ als Funktion des Gesamtdrehimpulses (Gesamtspin) $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{S}}^{(1)} + \vec{\mathbf{S}}^{(2)}$ und seiner z–Komponente $\mathbf{S}_z$ dar.

2. Wieviele Eigenwerte kann der Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ maximal haben?

3. Welche sind die möglichen Messwerte für die Energie des Systems?

4. Berechne durch Wahl einer geeigneten Orthonormalbasis die Eigenwerte, ihre Entartung und die zugehörigen Eigenvektoren. Verwende dabei die Clebsch–Gordan Koeffizienten

$$\begin{aligned}\big\langle \tfrac{1}{2}, M \mp \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2} \,\big|\, 1, M\big\rangle &= \sqrt{\tfrac{1\pm M}{2}} \\ \big\langle \tfrac{1}{2}, M \mp \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{1}{2} \,\big|\, 0, 0\big\rangle &= (-1)^{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}}\sqrt{\tfrac{1}{2}}\end{aligned}$$

   um die entsprechenden Elemente $|\, (\frac{1}{2}\frac{1}{2})SM\rangle$ der Standardbasis von Gesamtdrehimpulseigenzuständen zu konstruieren.

5. Gib die Grundzustandsenergie E_0 und den zugehörigen Eigenvektor an.

6. Berechne die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der z–Komponente vom ersten Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchen den Messwert $-\frac{\hbar}{2}$ zu finden, wenn sich das System im Grundzustand befindet.

7. Nimm an, dass sich das System in einem Zustand befindet, bei dem die z–Komponente des ersen Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchens den Wert $+\frac{\hbar}{2}$ und die z–Komponente des zweiten Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchens den Wert $-\frac{\hbar}{2}$ hat. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Energiemessung die Grundzustandsenergie ergibt?