[7] Identische Teilchen: Bosonen

Bosonen: Permutationen, Symmetrisierungsoperator, Bosonische Zustände

Beispiel 1: Betrachtet wird ein System von 2 identischen nicht-wechselwirkenden Spin–0–Teilchen, die sich in einer Raumdimension bewegen. Hilbertraum $\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{Bahn}}$ und Hamiltonoperator $\mathbf{H}_0$ sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{Bahn}} &= \mathscr{H}^{(1)}_{\mathrm{Bahn}} \otimes \mathscr{H}^{(2)}_{\mathrm{Bahn}} = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \\ \mathbf{H}_0 &= \mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)} \\ \mathbf{H}^{(j)} &= \frac{1}{2m}\mathbf{P}^{(j)2} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^{(j)2} \end{aligned}$$

(siehe **Grau:** VII.1, VII.2, VII.3, VII.14)

1. Gib die Eigenwerte, ihre Entartung und zugehörige Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$ bezüglich $\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{Bahn}}$ an, wobei $\mathbf{H}^{(j)} \,|\, n_j\rangle^{(j)} = \hbar\omega(n_j + \frac{1}{2}) \,|\, n_j\rangle^{(j)}$ mit $n_j \in \mathbb{Z}_0^+$ zu verwenden ist.

2. Zeige, dass wegen $\mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}}_{(12)}\, \mathbf{X}^{(1)}\, \mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}\,\dagger}_{(12)} = \mathbf{X}^{(2)}$ und $\mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}}_{(12)}\, \mathbf{P}^{(1)}\, \mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}\,\dagger}_{(12)} = \mathbf{P}^{(2)}$ die Vertauschungsregel $\left[\mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}}_{(12)}\, , \mathbf{H}_0\right] = \mathbf{0}$ gilt, wobei $\mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}}_{(12)}$ den Permutationsoperator bezüglich des Bahnfreiheitsgrades darstellt.

$$\boxed{\left[\mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}}_{(12)}\, f\right](x_1, x_2) = f(x_2, x_1)}$$

3. Berechne allgemein die bosonischen (symmetrisierten) Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$, dh. gib die Eigenwerte, ihre Entartung und zugehörige orthonormierte Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$ bezüglich $\mathscr{S}^{\mathrm{Bahn}}\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{Bahn}}$ an, wobei $\mathscr{S}^{\mathrm{Bahn}}$ den Symmetrisierungsoperator bezeichnet.

$$\boxed{\mathscr{S}^{\mathrm{Bahn}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1}^{\mathrm{Bahn}} + \mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}}_{(12)}\right)}$$

4. Gib für den Grundzustand, den ersten angeregten und den zweiten angeregten Zustand die entsprechenden bosonischen Eigenvektoren explizit an. Vergleiche die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Teilchen die durch symmetrisierte Eigenfunktionen beschrieben werden mit jenen die durch nicht-symmetrisierte Eigenfunktionen von $\mathbf{H}_0$ beschrieben werden.

5. Zeige, daß für jeden permutationsinvarianten Operator $\mathbf{W}$, dh. $\left[\mathbf{W}\, , \mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}}_{(12)}\right] = \mathbf{0}$, aus $\mathbf{W}\mathscr{S}^{\mathrm{Bahn}} \,|\, z\rangle = \,|\, z'\rangle$ mit $\mathscr{S}^{\mathrm{Bahn}} \,|\, z\rangle = \,|\, z\rangle$ die Gleichung $\mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}}_{(12)} \,|\, z'\rangle = \,|\, z'\rangle$ folgt.

6. Berechne die Matrixdarstellung des Hamiltonoperators

$$\mathbf{H}(\lambda) = \mathbf{H}_0 + \lambda\sqrt{2m\hbar\omega^3}\,(\mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{X}^{(2)}) \qquad \lambda \in [0, 1]$$

bezüglich des 3-dimensionalen Unterraumes der von den bosonischen Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$ aufgespannt wird, die den ersten und den zweiten angeregten Zustand definieren. Verwende dabei die Identitäten $\mathbf{X}^{(j)} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\mathbf{a}_j{}^\dagger + \mathbf{a}_j\right)$ und weiters die Relationen $\mathbf{a}_j{}^\dagger \,|\, n_j\rangle = \sqrt{n_j + 1} \,|\, n_j + 1\rangle$, bzw. $\mathbf{a}_j \,|\, n_j\rangle = \sqrt{n_j} \,|\, n_j - 1\rangle$ und kommentiere das Ergebnis.

[7] Identische Teilchen: Bosonen

Bosonen: Permutationen, Symmetrisierungsoperator, Bosonische Zustände

Beispiel 2: Betrachtet wird ein System von 2 identischen nicht-wechselwirkenden Spin–0–Teilchen, die sich in einer Raumdimension mit periodischen Randbedingungen ($L = 2\pi$) bewegen. Hilbertraum $\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{Bahn}}$ und Hamiltonoperator $\mathbf{H}_0$ sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{Bahn}} &= \mathscr{H}^{(1)}_{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{H}^{(2)}_{\text{Bahn}} = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \\
\mathbf{H}_0 &= \mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)} \\
\mathbf{H}^{(j)} &= \tfrac{1}{2m} \mathbf{P}^{(j)2}
\end{aligned}$$

1. Gib die Eigenwerte, ihre Entartung und zugehörige Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$ bezüglich $\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{Bahn}}$ an, wobei $\mathbf{H}^{(j)}\, \mathbf{u}^{(j)}_{n_j} = \frac{\hbar^2}{2m} n_j^2\, \mathbf{u}^{(j)}_{n_j}$ mit $n_j \in \mathbb{Z}$ zu verwenden ist.

2. Zeige, dass wegen $\mathsf{U}^{\text{Bahn}}_{(12)}\, \mathbf{P}^{(1)}\, \mathsf{U}^{\text{Bahn}\,\dagger}_{(12)} = \mathbf{P}^{(2)}$ die Vertauschungsregel $\left[\mathsf{U}^{\text{Bahn}}_{(12)}\,,\, \mathbf{H}_0\right] = \mathbf{0}$ gilt, wobei $\mathsf{U}^{\text{Bahn}}_{(12)}$ den Permutationsoperator bezüglich des Bahnfreiheitsgrades darstellt.

$$\boxed{\left[\mathsf{U}^{\text{Bahn}}_{(12)}\, f\right](x_1, x_2) = f(x_2, x_1)}$$

3. Berechne allgemein die bosonischen (symmetrisierten) Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$, dh. gib die Eigenwerte, ihre Entartung und zugehörige orthonormierte Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$ bezüglich $\mathscr{S}^{\text{Bahn}} \mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{Bahn}}$ an, wobei $\mathscr{S}^{\text{Bahn}}$ den Symmetrisierungsoperator bezeichnet.

$$\boxed{\mathscr{S}^{\text{Bahn}} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{1}^{\text{Bahn}} + \mathsf{U}^{\text{Bahn}}_{(12)}\right)}$$

4. Gib für den Grundzustand, den ersten angeregten und den zweiten angeregten Zustand die entsprechenden bosonischen Eigenvektoren explizit an. Vergleiche die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Teilchen die durch symmetrisierte Eigenfunktionen beschrieben werden mit jenen die durch nicht-symmetrisierte Eigenfunktionen von $\mathbf{H}_0$ beschrieben werden.

5. Zeige, daß für jeden permutationsinvarianten Operator $\mathbf{W}$, dh. $\left[\mathbf{W}\,,\, \mathsf{U}^{\text{Bahn}}_{(12)}\right] = \mathbf{0}$, aus $\mathbf{W} \mathscr{S}^{\text{Bahn}}\, \Phi = \Phi'$ mit $\mathscr{S}^{\text{Bahn}}\, \Phi = \Phi$ die Gleichung $\mathsf{U}^{\text{Bahn}}_{(12)}\, \Phi' = \Phi'$ folgt.

6. Berechne die Matrixdarstellung des Hamiltonoperators

$$\mathbf{H}(\lambda) = \mathbf{H}_0 + \lambda\left(\cos \mathbf{X}^{(1)} + \cos \mathbf{X}^{(2)}\right) \qquad \lambda \in [0, 1]$$

bezüglich des 3-dimensionalen Unterraumes der von den bosonischen Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$ aufgespannt wird, die den Grundzustand und den ersten angeregten Zustand definieren. Verwende dabei die Identitäten

$$\cos \mathbf{X}^{(j)}\, \mathbf{u}^{(j)}_{n_j} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{u}^{(j)}_{n_j+1} + \mathbf{u}^{(j)}_{n_j-1}\right)$$

und kommentiere das Ergebnis.

[7] Identische Teilchen: Fermionen

Fermionen: Permutationen, Antisymmetrisierungsoperator, Fermionische Zustände

Beispiel 3: Betrachtet wird ein System von 2 identischen nicht-wechselwirkenden Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchen, die sich in einer Raumdimension bewegen. Hilbertraum $\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{B-S}}$ und Hamiltonoperator $\mathbf{H}_0$ sind wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{B-S}} &= \mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{Bahn}} \otimes \mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{Spin}} \\
\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{Bahn}} &= \mathscr{H}^{(1)}_{\mathrm{Bahn}} \otimes \mathscr{H}^{(2)}_{\mathrm{Bahn}} = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \\
\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{Spin}} &= \mathscr{H}^{(1)}_{\mathrm{Spin}} \otimes \mathscr{H}^{(2)}_{\mathrm{Spin}} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \\
\mathbf{H}_0 &= \left(\mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}\right) \otimes \mathbf{1}^{\mathrm{Spin}} \\
\mathbf{H}^{(j)} &= \frac{1}{2m}\mathbf{P}^{(j)2} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^{(j)2}
\end{aligned}
$$

(siehe **Grau:** VII.5, VII.6, VII.7, VII.10)

1. Gib die Eigenwerte, ihre Entartung und zugehörige Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$ bezüglich $\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{B-S}}$ an, wobei $\mathbf{H}^{(j)} \left| n_j \right\rangle^{(j)} = \hbar\omega(n_j + \frac{1}{2}) \left| n_j \right\rangle^{(j)}$ mit $n_j \in \mathbb{Z}_0^+$ zu verwenden ist. Da der Hamiltonoperator $\mathbf{H}_0$ nicht explizit vom Spin abhängt, vertauscht $\mathbf{H}_0$ mit $\vec{\mathbf{S}}^2$ und $\mathbf{S}_z$. Aus diesem Grund kann der Spinteil der Energieeigenzustände durch die Quantenzahlen S, M des Gesamtspins $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{S}}^{(1)} + \vec{\mathbf{S}}^{(2)}$ gekennzeichnet werden. Verwende daher

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\left| S=0, M=0 \right\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left| +- \right\rangle - \left| -+ \right\rangle \right) &&= \left| 0,0 \right\rangle_{\mathrm{Spin}} \\
\left| S=1, M=1 \right\rangle &= \left| ++ \right\rangle &&= \left| 1,1 \right\rangle_{\mathrm{Spin}} \\
\left| S=1, M=0 \right\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left| +- \right\rangle + \left| -+ \right\rangle \right) &&= \left| 1,0 \right\rangle_{\mathrm{Spin}} \\
\left| S=1, M=-1 \right\rangle &= \left| -- \right\rangle &&= \left| 1,-1 \right\rangle_{\mathrm{Spin}}
\end{aligned}
}
$$

   wobei $\left| m_1, m_2 \right\rangle = \left| m_1 \right\rangle^{(1)} \otimes \left| m_2 \right\rangle^{(2)}$ mit $m_j = \pm\frac{1}{2} = \pm$ zu verstehen ist.

2. Der Permutationsoperator $\mathsf{U}_{(12)}$, der Teilchen 1 mit Teilchen 2 vertauscht, ist wie folgt definiert

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\mathsf{U}_{(12)} &= \mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}}_{(12)} \otimes \mathsf{U}^{\mathrm{Spin}}_{(12)} \\
\left[\mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}}_{(12)} f\right](x_1, x_2) &= f(x_2, x_1) \\
\mathsf{U}^{\mathrm{Spin}}_{(12)} \left| m_1, m_2 \right\rangle &= \left| m_2, m_1 \right\rangle
\end{aligned}
}
$$

   wobei $\mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}}_{(12)}$ den Permutationsoperator bezüglich des Bahnfreiheitsgrades und $\mathsf{U}^{\mathrm{Spin}}_{(12)}$ den Permutationsoperator bezüglich des Spinfreiheitsgrades darstellt. Zeige, daß die Vertauschungsregel $\left[\mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}}_{(12)}, \mathbf{H}_0\right] = \mathbf{0}$ gilt und daß der Spinaustauschoperator $\mathsf{U}^{\mathrm{Spin}}_{(12)}$ wie folgt geschrieben werden kann:

$$
\boxed{
\mathsf{U}^{\mathrm{Spin}}_{(12)} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{1}^{\mathrm{Spin}} + \vec{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} \cdot \vec{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)} \right)
}
$$

[7] Identische Teilchen: Fermionen

Fermionen: Permutationen, Antisymmetrisierungsoperator, Fermionische Zustände

Beispiel 4: Betrachtet wird ein System von 2 identischen nicht-wechselwirkenden Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchen, die sich in einer Raumdimension bewegen. Hilbertraum $\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{B-S}}$ und Hamiltonoperator $\mathbf{H}_0$ sind wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{B-S}} &= \mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{Spin}} \\
\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{Bahn}} &= \mathscr{H}^{(1)}_{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{H}^{(2)}_{\text{Bahn}} = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \\
\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{Spin}} &= \mathscr{H}^{(1)}_{\text{Spin}} \otimes \mathscr{H}^{(2)}_{\text{Spin}} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \\
\mathbf{H}_0 &= \left(\mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}\right) \otimes \mathbf{1}^{\text{Spin}} \\
\mathbf{H}^{(j)} &= \frac{1}{2m}\mathbf{P}^{(j)2} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^{(j)2}
\end{aligned}
$$

(siehe **Grau:** VII.5, VII.6, VII.7, VII.10, siehe auch Beispiel **IdT3**)

1. Gib die Eigenwerte, ihre Entartung und zugehörige Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$ bezüglich $\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{B-S}}$ an, wobei $\mathbf{H}^{(j)} \,|\, n_j\rangle^{(j)} = \hbar\omega(n_j+\frac{1}{2}) \,|\, n_j\rangle^{(j)}$ mit $n_j \in \mathbb{Z}_0^+$ zu verwenden ist. Da der Hamiltonoperator $\mathbf{H}_0$ nicht explizit vom Spin abhängt, vertauscht $\mathbf{H}_0$ mit $\vec{\mathbf{S}}^2$ und $\mathbf{S}_z$. Aus diesem Grund kann der Spinteil der Energieeigenzustände durch die Quantenzahlen S, M des Gesamtspins $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{S}}^{(1)} + \vec{\mathbf{S}}^{(2)}$ gekennzeichnet werden.

2. Zeige, daß der Antisymmetrisierungsoperator $\mathscr{A}$

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} - \mathsf{U}_{(12)}\right)}$$

wie folgt geschrieben werden kann

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \mathscr{S}^{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{A}^{\text{Spin}} + \mathscr{A}^{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{S}^{\text{Spin}} \\
\mathscr{S}^{\text{Bahn}} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{1}^{\text{Bahn}} + \mathsf{U}^{\text{Bahn}}_{(12)}\right) \\
\mathscr{A}^{\text{Bahn}} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{1}^{\text{Bahn}} - \mathsf{U}^{\text{Bahn}}_{(12)}\right) \\
\mathscr{S}^{\text{Spin}} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{1}^{\text{Spin}} + \mathsf{U}^{\text{Spin}}_{(12)}\right) \\
\mathscr{A}^{\text{Spin}} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{1}^{\text{Spin}} - \mathsf{U}^{\text{Spin}}_{(12)}\right)
\end{aligned}
}
$$

3. Kommentiere die Ergebnisse für

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A} \,|\, z\rangle &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} - \mathsf{U}_{(12)}\right) |\, z\rangle \\
\mathscr{A} \,|\, z\rangle &= \left(\mathscr{S}^{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{A}^{\text{Spin}} + \mathscr{A}^{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{S}^{\text{Spin}}\right) |\, z\rangle
\end{aligned}
$$

wenn $|\, z\rangle$ ein beliebiger Produktzustand von $\mathscr{H}$ ist, dh. wenn die folgende Faktorisierung $\langle x_1, x_2 \,|\, z\rangle = f_1(x_1)f_2(x_2) \,|\, m_1, m_2\rangle$ gilt. Was folgt aus

$$\left(\mathscr{S}^{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{A}^{\text{Spin}}\right)\left(\mathscr{A}^{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{S}^{\text{Spin}}\right) = \mathbf{0}$$

wenn berücksichtigt wird, daß $\mathscr{S}^{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{A}^{\text{Spin}}$ und $\mathscr{A}^{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{S}^{\text{Spin}}$ Projektionsoperatoren sind?

[7] Identische Teilchen: Fermionen

Fermionen: Permutationen, Antisymmetrisierungsoperator, Fermionische Zustände

Beispiel 5: Betrachtet wird ein System von 2 identischen nicht-wechselwirkenden Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchen, die sich in einer Raumdimension bewegen. Hilbertraum $\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{B-S}}$ und Hamiltonoperator $\mathbf{H}_0$ sind wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{B-S}} &= \mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{Bahn}} \otimes \mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{Spin}} \\
\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{Bahn}} &= \mathscr{H}^{(1)}_{\mathrm{Bahn}} \otimes \mathscr{H}^{(2)}_{\mathrm{Bahn}} = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \\
\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{Spin}} &= \mathscr{H}^{(1)}_{\mathrm{Spin}} \otimes \mathscr{H}^{(2)}_{\mathrm{Spin}} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \\
\mathbf{H}_0 &= \big(\mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}\big) \otimes \mathbf{1}^{\mathrm{Spin}} \\
\mathbf{H}^{(j)} &= \tfrac{1}{2m}\mathbf{P}^{(j)2} + \tfrac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^{(j)2}
\end{aligned}
$$

(siehe **Grau:** VII.5, VII.6, VII.7, VII.10, siehe auch Beispiel **IdT3** und **IdT4**)

1. Gib die Eigenwerte, ihre Entartung und zugehörige Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$ bezüglich $\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{B-S}}$ an, wobei $\mathbf{H}^{(j)} \,|\, n_j\rangle^{(j)} = \hbar\omega(n_j+\frac{1}{2}) \,|\, n_j\rangle^{(j)}$ mit $n_j \in \mathbb{Z}_0^+$ zu verwenden ist. Da der Hamiltonoperator $\mathbf{H}_0$ nicht explizit vom Spin abhängt, vertauscht $\mathbf{H}_0$ mit $\vec{\mathbf{S}}^2$ und $\mathbf{S}_z$. Aus diesem Grund kann der Spinteil der Energieeigenzustände durch die Quantenzahlen S, M des Gesamtspins $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{S}}^{(1)} + \vec{\mathbf{S}}^{(2)}$ gekennzeichnet werden.

2. Berechne allgemein die fermionischen (antisymmetrisierten) Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$, dh. gib die Eigenwerte, ihre Entartung und zugehörige orthonormierte Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$ bezüglich $\mathscr{A}\,\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{B-S}}$ an, wobei die Zerlegung $\mathscr{A} = \mathscr{S}^{\mathrm{Bahn}} \otimes \mathscr{A}^{\mathrm{Spin}} + \mathscr{A}^{\mathrm{Bahn}} \otimes \mathscr{S}^{\mathrm{Spin}}$ zu verwenden ist.

3. Gib für den Grundzustand, den ersten angeregten und den zweiten angeregten Zustand die entsprechenden fermionischen Eigenvektoren explizit an.

4. Zeige, daß für jeden permutationsinvarianten Operator $\mathbf{W}$, dh. $\big[\mathbf{W}\,,\,\mathsf{U}_{(12)}\big] = \mathbf{0}$, aus $\mathbf{W}\,\mathscr{A}\,|\,z\rangle = |\,z'\rangle$ mit $\mathscr{A}\,|\,z\rangle = |\,z\rangle$ die Gleichung $\mathsf{U}_{(12)}\,|\,z'\rangle = -\,|\,z'\rangle$ folgt.

5. Berechne die Matrixdarstellung des Wechselwirkungsoperator $\mathbf{W}$

$$
\mathbf{W} = \sqrt{2m\hbar\omega^3}\big(\mathbf{X}^{(1)} + \mathbf{X}^{(2)}\big) \otimes \mathbf{1}^{\mathrm{Spin}} + \tfrac{eB}{mc}\big[\mathbf{1}^{\mathrm{Bahn}} \otimes \big(\mathbf{S}_z^{(1)} + \mathbf{S}_z^{(2)}\big)\big]
$$

bezüglich des 4-dimensionalen Unterraumes der von den fermionischen Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$ aufgespannt wird, die den ersten angeregten Zustand definieren. Zeige, daß die Vertauschungsregel $[\mathsf{U}_{(12)}\,,\,\mathbf{S}_z] = \mathbf{0}$ gilt.

[7] Identische Teilchen: Fermionen

Fermionen: Permutationen, Antisymmetrisierungsoperator, Fermionische Zustände

Beispiel 6: Betrachtet wird ein System von 2 identischen nicht-wechselwirkenden Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchen, die sich in einer Raumdimension in einem ∞-tiefen Kastenpotential bewegen. Hilbertraum $\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{B-S}}$ und Hamiltonoperator $\mathbf{H}_0$ sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{B-S}} &= \mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{Bahn}} \otimes \mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{Spin}} \\
\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{Bahn}} &= \mathscr{H}^{(1)}_{\mathrm{Bahn}} \otimes \mathscr{H}^{(2)}_{\mathrm{Bahn}} = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \\
\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{Spin}} &= \mathscr{H}^{(1)}_{\mathrm{Spin}} \otimes \mathscr{H}^{(2)}_{\mathrm{Spin}} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \\
\mathbf{H}_0 &= \left(\mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}\right) \otimes \mathbf{1}^{\mathrm{Spin}} \\
\mathbf{H}^{(j)} &= \frac{1}{2m}\mathbf{P}^{(j)2}
\end{aligned}$$

(siehe **Grau:** VII.10)

1. Gib die Eigenwerte, ihre Entartung und zugehörige Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$ bezüglich $\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\mathrm{B-S}}$ an, wobei $\mathbf{H}^{(j)} \,|\, n_j\rangle^{(j)} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{(n_j+1)\pi}{2a}\right)^2 \,|\, n_j\rangle^{(j)}$ mit $n_j \in \mathbb{Z}_0^+$ zu verwenden ist. Da der Hamiltonoperator $\mathbf{H}_0$ nicht explizit vom Spin abhängt, vertauscht $\mathbf{H}_0$ mit $\vec{\mathbf{S}}^2$ und $\mathbf{S}_z$. Aus diesem Grund kann der Spinteil der Energieeigenzustände durch die Quantenzahlen S, M des Gesamtspins $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{S}}^{(1)} + \vec{\mathbf{S}}^{(2)}$ gekennzeichnet werden. Verwende daher

$$\begin{aligned}
|\, S=0, M=0\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\, +-\rangle - |\, -+\rangle\right) &&= |\, 0,0\rangle_{\mathrm{Spin}} \\
|\, S=1, M=1\rangle &= |\, ++\rangle &&= |\, 1,1\rangle_{\mathrm{Spin}} \\
|\, S=1, M=0\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\, +-\rangle + |\, -+\rangle\right) &&= |\, 1,0\rangle_{\mathrm{Spin}} \\
|\, S=1, M=-1\rangle &= |\, --\rangle &&= |\, 1,-1\rangle_{\mathrm{Spin}}
\end{aligned}$$

   wobei $|\, m_1, m_2\rangle = |\, m_1\rangle^{(1)} \otimes |\, m_2\rangle^{(2)}$ mit $m_j = \pm\frac{1}{2} = \pm$ zu verstehen ist.

2. Der Permutationsoperator $\mathsf{U}_{(12)}$, der Teilchen 1 mit Teilchen 2 vertauscht, ist wie folgt definiert

$$\begin{aligned}
\mathsf{U}_{(12)} &= \mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}}_{(12)} \otimes \mathsf{U}^{\mathrm{Spin}}_{(12)} \\
\left[\mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}}_{(12)}\, f\right](x_1, x_2) &= f(x_2, x_1) \\
\mathsf{U}^{\mathrm{Spin}}_{(12)} \,|\, m_1, m_2\rangle &= |\, m_2, m_1\rangle
\end{aligned}$$

   wobei $\mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}}_{(12)}$ den Permutationsoperator bezüglich des Bahnfreiheitsgrades und $\mathsf{U}^{\mathrm{Spin}}_{(12)}$ den Permutationsoperator bezüglich des Spinfreiheitsgrades darstellt.

3. Zeige, daß die Vertauschungsregel $\left[\mathsf{U}^{\mathrm{Bahn}}_{(12)}\, ,\, \mathbf{H}_0\right] = \mathbf{0}$ gilt.

[7] Identische Teilchen: Fermionen

Fermionen: Permutationen, Antisymmetrisierungsoperator, Fermionische Zustände

Beispiel 7: Betrachtet wird ein System von 2 identischen nicht-wechselwirkenden Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchen, die sich in einer Raumdimension in einem ∞-tiefen Kastenpotential bewegen. Hilbertraum $\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{B-S}}$ und Hamiltonoperator $\mathbf{H}_0$ sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{B-S}} &= \mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{Spin}} \\
\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{Bahn}} &= \mathscr{H}^{(1)}_{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{H}^{(2)}_{\text{Bahn}} = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) \\
\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{Spin}} &= \mathscr{H}^{(1)}_{\text{Spin}} \otimes \mathscr{H}^{(2)}_{\text{Spin}} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \\
\mathbf{H}_0 &= \left(\mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}\right) \otimes \mathbf{1}^{\text{Spin}} \\
\mathbf{H}^{(j)} &= \frac{1}{2m}\mathbf{P}^{(j)2}
\end{aligned}$$

(siehe **Grau:** VII.10)

1. Gib die Eigenwerte, ihre Entartung und zugehörige Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$ bezüglich $\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{B-S}}$ an, wobei $\mathbf{H}^{(j)} \,|\, n_j \rangle^{(j)} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{(n_j+1)\pi}{2a}\right)^2 |\, n_j \rangle^{(j)}$ mit $n_j \in \mathbb{Z}_0^+$ zu verwenden ist. Da der Hamiltonoperator $\mathbf{H}_0$ nicht explizit vom Spin abhängt, vertauscht $\mathbf{H}_0$ mit $\vec{\mathbf{S}}^2$ und $\mathbf{S}_z$. Aus diesem Grund kann der Spinteil der Energieeigenzustände durch die Quantenzahlen S, M des Gesamtspins $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{S}}^{(1)} + \vec{\mathbf{S}}^{(2)}$ gekennzeichnet werden.

2. Zeige, daß der Antisymmetrisierungsoperator $\mathscr{A}$ wie folgt geschrieben werden kann:

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} - \mathsf{U}_{(12)}\right) = \mathscr{S}^{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{A}^{\text{Spin}} + \mathscr{A}^{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{S}^{\text{Spin}}}$$

3. Berechne allgemein die fermionischen (antisymmetrisierten) Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$, dh. gib die Eigenwerte, ihre Entartung und zugehörige orthonormierte Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$ bezüglich $\mathscr{A}\,\mathscr{H}^{1\otimes 2}_{\text{B-S}}$ an, wobei die Zerlegung $\mathscr{A} = \mathscr{S}^{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{A}^{\text{Spin}} + \mathscr{A}^{\text{Bahn}} \otimes \mathscr{S}^{\text{Spin}}$ zu verwenden ist.

4. Gib für den Grundzustand, den ersten angeregten und den zweiten angeregten Zustand die entsprechenden fermionischen Eigenvektoren in der $\{x_1, x_2; m_1, m_2\}$– und in der $\{x_1, x_2; S, M\}$–Darstellung an.

5. Zeige, daß für jeden permutationsinvarianten Operator $\mathbf{W}$, dh. $\left[\mathbf{W}\,,\,\mathsf{U}_{(12)}\right] = \mathbf{0}$, aus $\mathbf{W}\,\mathscr{A}\,|\, z\rangle = |\, z'\rangle$ mit $\mathscr{A}\,|\, z\rangle = |\, z\rangle$ die Gleichung $\mathsf{U}_{(12)}\,|\, z'\rangle = -\,|\, z'\rangle$ folgt.

6. Berechne die Matrixdarstellung des Wechselwirkungsoperator $\mathbf{W}$

$$\mathbf{W} = \frac{eB}{mc}\left(\mathbf{S}_z^{(1)} + \mathbf{S}_z^{(2)}\right)$$

bezüglich des 5-dimensionalen Unterraumes der von den fermionischen Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$ aufgespannt wird, die den Grundzustand und den ersten angeregten Zustand definieren.