[1] Mathematischer Formalismus:

Bewegungsgleichung, Eigenwertproblem, unitäre Operatoren, äquivalente Basen, Projektionsoperatoren, Spektralzerlegung (Mathematische Schreibweise)

Beispiel 1: Im Hilbertraum $\mathbb{C}^2$ (2-dimensionaler unitärer Raum) ist eine Orthonormalbasis $\mathsf{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ mit $\langle \mathbf{e}_j \,, \mathbf{e}_k \rangle = \delta_{jk}$ und der Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ gegeben, der durch seine Wirkung auf die Elemente der Basis E definiert ist.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{H}\,\mathbf{e}_1 &= \tfrac{\hbar\omega}{2}\,\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{H}\,\mathbf{e}_2 &= \tfrac{\hbar\omega}{2}\,\mathbf{e}_1 \end{aligned}}$$

1. Wie lautet die entsprechende zeitabhängige Bewegungsgleichung?

2. Zeige, daß $\mathbf{H}$ hermitesch ist und löse das Eigenwertproblem für $\mathbf{H}$, dh. gib seine Eigenwerte E_n und zugehörige orthonormierte Eigenzustände $\mathbf{u}_n$ für $n = 1, 2$ an. Gib auch die entsprechenden stationären Zustände an.

3. Gib zwei allgemeine auf 1 normierte Lösungen $\psi_j(t)$ für $j = 1, 2$ der Bewegungsgleichung an, die zusätzlich $\langle \psi_1(t) \,, \psi_2(t) \rangle = 0$ erfüllen. Wieviele linear unabhängige Lösungen der Bewegungsgleichung kann man finden?

4. Berechne $U(t)\,\mathbf{e}_j$ für $j = 1, 2$ und zeige, daß der Operator der zeitlichen Entwicklung $U(t) = \exp\{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}t\}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein unitärer Operator ist, dh.

   $$\langle U(t)f \,, U(t)g \rangle = \langle f \,, g \rangle$$

   gilt, wobei f, g zwei beliebige Zustände aus $\mathbb{C}^2$ sind. Gib die Matrixdarstellung von $U(t)$ bezüglich der Basis E an. Zeige, daß alle $U(t)$ Normaloperatoren sind.

5. Gib die Eigenwerte $\epsilon_n(t)$ und zugehörigen Eigenzustände $\mathbf{w}_n(t)$ mit $n = 1, 2$ des Operators der zeitlichen Entwicklung $U(t)$ an. Gib zu $U(t)$ den zugehörigen adjungierten Operator $U(t)^\dagger$ an.

6. Beweise $U(t)\,\mathbf{u}_n(0) = \mathbf{u}_n(t)$ für $n = 1, 2$ und damit $U(t)\,\psi_j(0) = \psi_j(t)$ für $j = 1, 2$. Zeige, daß die Basen $\{\mathbf{e}_j \,|\, j = 1, 2\}$, $\{\mathbf{u}_n(0) \,|\, n = 1, 2\}$ und schließlich $\{\mathbf{u}_n(t) \,|\, n = 1, 2\}$ äquivalente Orthonormalbasen von $\mathbb{C}^2$ sind. Zeige zu diesem Zweck, daß ein unitärer Operator V mit $V\,\mathbf{e}_j = \mathbf{u}_j(0)$ existiert.

7. Zeige, daß die Operatoren $\mathsf{Q}_n = \mathbf{u}_n \blacksquare \mathbf{u}_n{}^\dagger$ (dyadisches Produkt) für $n = 1, 2$ Projektionsoperatoren sind. Gib ihre Matrixdarstellung bezüglich der Basis E und bezüglich $\{\mathbf{u}_n \,|\, n = 1, 2\}$ an. Zeige, daß wegen $\mathsf{Q}_n\,\mathsf{Q}_m = \delta_{mn}\mathsf{Q}_n$ der Zustandsraum $\mathbb{C}^2$ in die direkte Summe von zwei 1-dimensionalen orthogonalen Unterräumen zerfällt. Gib die Zerlegung der Einheit an.

8. Gib die Spektralzerlegung von $\mathbf{H}$ und ihre Matrixdarstellung bezüglich der Orthonormalbasis E und bezüglich $\{\mathbf{u}_n \,|\, n = 1, 2\}$ an.

[1] Mathematischer Formalismus:

Bewegungsgleichung, Eigenwertproblem, unitäre Operatoren, äquivalente Basen, Projektionsoperatoren, Spektralzerlegung (BRA und KET Schreibweise)

Beispiel 2: Im Hilbertraum $\mathbb{C}^2$ (2-dimensionaler unitärer Raum) ist eine Orthonormalbasis $\mathsf{E} = \{ \,|\, e_1 \rangle, \,|\, e_2 \rangle \}$ mit $\langle e_j \,|\, e_k \rangle = \delta_{jk}$ und der Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ gegeben, der durch seine Wirkung auf die Basis E definiert ist.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{H} \,|\, e_1 \rangle &= +i\tfrac{\hbar\omega}{2} \,|\, e_2 \rangle \\ \mathbf{H} \,|\, e_2 \rangle &= -i\tfrac{\hbar\omega}{2} \,|\, e_1 \rangle \end{aligned}}$$

1. Wie lautet die entsprechende zeitabhängige Bewegungsgleichung?

2. Zeige, daß $\mathbf{H}$ hermitesch ist und löse das Eigenwertproblem für $\mathbf{H}$, dh. gib seine Eigenwerte E_n und zugehörige orthonormierte Eigenzustände $|\, u_n \rangle$ für $n = 1, 2$ an. Gib auch die entsprechenden stationären Zustände an.

3. Gib zwei allgemeine auf 1 normierte Lösungen $|\, \psi_j(t) \rangle$ für $j = 1, 2$ der Bewegungsgleichung an, die zusätzlich $\langle \psi_1(t) \,|\, \psi_2(t) \rangle = 0$ erfüllen. Wieviele linear unabhängige Lösungen der Bewegungsgleichung kann man finden?

4. Berechne $U(t) \,|\, e_j \rangle$ für $j = 1, 2$ und zeige, daß der Operator der zeitlichen Entwicklung $U(t) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}t\right\}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein unitärer Operator ist, dh.
$$\langle f \,|\, U(t)^\dagger U(t) \,|\, g \rangle = \langle f \,|\, g \rangle$$
gilt, wobei $|\, f \rangle$, $|\, g \rangle$ zwei beliebige Zustände aus $\mathbb{C}^2$ sind. Gib die Matrixdarstellung von $U(t)$ bezüglich der Basis E an. Zeige, daß alle $U(t)$ Normaloperatoren sind.

5. Gib die Eigenwerte $\epsilon_n(t)$ und zugehörigen Eigenzustände $|\, w_n(t) \rangle$ für $n = 1, 2$ des Operators der zeitlichen Entwicklung $U(t)$ an. Gib zu $U(t)$ den adjungierten Operator $U(t)^\dagger$ an.

6. Beweise $U(t) \,|\, u_n(0) \rangle = |\, u_n(t) \rangle$ für $n = 1, 2$ und damit $U(t) \,|\, \psi_j(0) \rangle = |\, \psi_j(t) \rangle$ für $j = 1, 2$. Zeige, daß die Basen $\{ \,|\, e_j \rangle : j = 1, 2\}$, $\{ \,|\, u_n(0) \rangle : n = 1, 2\}$ und schließlich $\{ \,|\, u_n(t) \rangle : n = 1, 2\}$ äquivalente Orthonormalbasen von $\mathbb{C}^2$ sind. Zeige zu diesem Zweck, daß ein unitärer Operator V mit $V \,|\, e_j \rangle = |\, u_j(0) \rangle$ existiert.

7. Zeige, daß die Operatoren $\mathsf{Q}_n = |\, u_n \rangle\langle u_n \,|$ für $n = 1, 2$ Projektionsoperatoren sind. Gib ihre Matrixdarstellung bezüglich der Basis E und bezüglich $\{ \,|\, u_n \rangle : n = 1, 2\}$ an. Zeige, daß wegen $\mathsf{Q}_n \, \mathsf{Q}_m = \delta_{mn} \mathsf{Q}_n$ der Zustandsraum $\mathbb{C}^2$ in die direkte Summe von zwei 1-dimensionalen orthogonalen Unterräumen zerfällt. Gib die Zerlegung der Einheit an.

8. Gib die Spektralzerlegung von $\mathbf{H}$ und ihre Matrixdarstellung bezüglich der Orthonormalbasis E und bezüglich $\{ \,|\, u_n \rangle : n = 1, 2\}$ an.

[1] Mathematischer Formalismus:

Projektionsoperatoren – Eigenwertproblem – Spektralzerlegung – Dichteoperatoren

Beispiel 3: Im Hilbertraum $\mathbb{C}^2$ (= 2-dimensionaler unitärer Raum) ist eine Orthonormalbasis $\mathsf{E} = \{\,|\,e_1\rangle, \,|\,e_2\rangle\}$ mit $\langle e_j \,|\, e_k\rangle = \delta_{jk}$ und der Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ gegeben, der durch seine Wirkung auf die Basis E definiert ist.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{H}\,|\,e_1\rangle &= \tfrac{\hbar\omega}{2}\,|\,e_2\rangle \\ \mathbf{H}\,|\,e_2\rangle &= \tfrac{\hbar\omega}{2}\,|\,e_1\rangle \end{aligned}}$$

Die Eigenwerte von $\mathbf{H}$ und zugehörige Eigenzustände, bzw. stationären Zustände sind wie folgt gegeben: (siehe Beispiel **MF 1**)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\,|\,u_n\rangle &= E_n\,|\,u_n\rangle \qquad n = 1,2 \\ E_n &= \tfrac{\hbar\omega}{2}(-1)^{n-1} \\ |\,u_n\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|\,e_1\rangle + (-1)^{n-1}\,|\,e_2\rangle\right) \\ |\,u_n(t)\rangle &= |\,u_n\rangle e^{-i(\omega/2)(-1)^{n-1}t} \end{aligned}$$

1. Zeige, daß der dem Zustand $|\,A\rangle = a\,|\,e_1\rangle + b\,|\,e_2\rangle$ zugeordnete Operator $\mathsf{Q} = |\,A\rangle\langle A\,|$ dann und nur dann einen Projektionsoperator darstellt, wenn $|\,A\rangle$ auf 1 normiert ist, dh. $|\,a\,|^2 + |\,b\,|^2 = 1$ gilt.

2. Zeige, daß $\mathsf{Q} = |\,A\rangle\langle A\,|$ die Eigenwerte 1 und 0 hat, wenn $|\,a\,|^2 + |\,b\,|^2 = 1$ gilt.

3. Zeige, daß der dem Zustand $|\,B\rangle = b^*\,|\,e_1\rangle - a^*\,|\,e_2\rangle$ zugeordnete Operator $\mathsf{R} = |\,B\rangle\langle B\,|$ den zu Q orthogonalen Projektionsoperator darstellt, wenn auch $|\,B\rangle$ auf 1 normiert ist.

4. Zeige, daß $\mathsf{Q}\,\mathbb{C}^2 \cap \mathsf{R}\,\mathbb{C}^2 = \{\mathbf{0}\}$ gilt.

5. Zeige, daß die den Zuständen

$$\begin{aligned} |\,\psi_a(t)\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|\,u_1(t)\rangle + |\,u_2(t)\rangle\right) \\ |\,\psi_b(t)\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\,|\,u_1(t)\rangle + \sqrt{2}\,|\,u_2(t)\rangle\right) \end{aligned}$$

   zugeordneten Operatoren $\mathsf{Q}_\ell(t) = |\,\psi_\ell(t)\rangle\langle\psi_\ell(t)\,|\ ;\ \ell = a,b$ Projektionsoperatoren sind, die aber nicht $\mathsf{Q}_a(t)\,\mathsf{Q}_b(t) = \mathbf{O}$ erfüllen und damit nicht zur Zerlegung der Einheit herangezogen werden können. Gib den Grund dafür an.

6. Zeige, daß der Operator

$$\boldsymbol{\rho}(t) = (1-\lambda)\mathsf{Q}_a(t) + \lambda\mathsf{Q}_b(t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

   einen Dichteoperator darstellt, wobei $0 \le \lambda \le 1$ angenommen ist. Beachte, $\boldsymbol{\rho}(t)$ beschreibt für $\lambda = 0,1$ reine Zustände des Systems. Zeige also, daß *Spur* $\boldsymbol{\rho}(t) = 1$ und daß *Spur* $\rho(t)\mathbf{A} = (1-\lambda)\langle\psi_a(t)\,\mathbf{,}\,\mathbf{A}\psi_a(t)\rangle + \lambda\langle\psi_b(t)\,\mathbf{,}\,\mathbf{A}\psi_b(t)\rangle$ gilt, wenn $\mathbf{A}$ ein hermitescher Operator ist.

7. Berechne die Matrixdarstellung von $\boldsymbol{\rho}(t)$ bezüglich E und zeige, daß $\boldsymbol{\rho}(t)$ zeitabhängig ist.

[1] Mathematischer Formalismus:

Spur eines Operators – Eigenwertproblem von Normaloperatoren – Symmetrieoperatoren

Beispiel 4: Im Hilbertraum $\mathbb{C}^N$ (= N–dimensionaler unitärer Raum) ist eine Orthonormalbasis $\mathsf{E}_a = \{ \mid a_1\rangle, \mid a_2\rangle, \ldots \mid a_N\rangle\}$ mit $< a_j \mid a_k\rangle = \delta_{jk}$ gegeben.

1. Zeige, daß für jeden linearen Operator $\mathbf{A}$, der durch seine Wirkung auf die Elemente von E_a definiert ist, die Spur eine Invariante ist.

2. Zeige, daß folgendes gilt:

$$\begin{aligned} Spur\,(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) &= Spur\,(\mathbf{B}\,\mathbf{A}) \\ Spur\,(W\,\mathbf{A}\,W^{-1}) &= Spur\,\mathbf{A} \qquad W^{-1}W = W\,W^{-1} = \mathbf{1}_N \\ Spur\,(U\,\mathbf{A}\,U^\dagger) &= Spur\,\mathbf{A} \qquad U^\dagger U = U\,U^\dagger = \mathbf{1}_N \end{aligned}$$

3. Zeige, daß das Eigenwertspektrum für den Normaloperator $\mathbf{N}$, $W\,\mathbf{N}\,W^{-1}$ und $U\,\mathbf{N}\,U^\dagger$ identisch ist, wenn W ein beliebiger nicht-singulärer und U ein beliebiger unitärer Operator sind. Verwende dabei die Formeln

$$\begin{aligned} Det\,(\mathbf{AB}) &= Det\,\mathbf{A} * Det\,\mathbf{B} \\ Det\,(\mathbf{A}^{-1}) &= \big(Det\,\mathbf{A}\big)^{-1} \\ Det\,(U) &= e^{i\varphi} \end{aligned}$$

   Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eigenzuständen von $\mathbf{N}$, $W\mathbf{N}W^{-1}$ und $U\mathbf{N}U^\dagger$?

4. Zeige, daß folgendes gilt

$$\mathbf{N} \mid e_k\rangle = \lambda_k \mid e_k\rangle \iff \mathbf{N}^\dagger \mid e_k\rangle = \lambda_k^* \mid e_k\rangle$$

   wenn $\mid e_k\rangle$; $k = 1, 2, \ldots N$ die Eigenzustände von $\mathbf{N}$ sind.

5. Zeige, daß unter der Voraussetzung "$\mathbf{N}^{-1}$ existiert", folgendes gilt:

$$\mathbf{N} \mid e_k\rangle = \lambda_k \mid e_k\rangle \iff \mathbf{N}^{-1} \mid e_k\rangle = \lambda_k^{-1} \mid e_k\rangle$$

6. Zeige, daß folgendes gilt:

$$\mathbf{N} \mid e_k\rangle = \lambda_k \mid e_k\rangle \iff \mathbf{N}^m \mid e_k\rangle = \lambda_k^m \mid e_k\rangle$$

7. Ein unitärer Operator U heisst Symmetrieoperator vom Hamiltonoperator $\mathbf{H}$, wenn $\big[U\,,\mathbf{H}\big] = \mathbf{0}$ gilt. Zeige, dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned} (a)\quad U\,\mathbf{H}\,U^\dagger &= \mathbf{H} &&\Longrightarrow \mathbf{H}\,U \mid u_n\rangle = E_n\,U \mid u_n\rangle \\ (b)\quad U\,\mathbf{H}\,U^\dagger &= \mathbf{H}' \neq \mathbf{H} &&\Longrightarrow \mathbf{H}'\,U \mid u_n\rangle = E_n\,U \mid u_n\rangle \end{aligned}$$

   wenn $\mid u_n\rangle$; $n = 1, 2, \ldots N$ die Eigenzustände von $\mathbf{H}$ sind.

[1] Mathematischer Formalismus:

Eigenwertproblem selbstadjungierter Operatoren und Normaloperatoren – Matrixdarstellung von Operatoren bezüglich endlich-dimensionaler Unterräume

Beispiel 5: Der Impulsoperator

$$\big[\mathbf{P}f\big](x) \;=\; -i\hbar\partial_x f(x)$$

stellt im separablen Hilbertraum $\mathscr{H} \;=\; L^2([0,2\pi]) \;=\; L^2(\mathbb{L})$ einen selbstadjungierten Operator dar, wenn sein Definitionsbereich $\mathscr{D}_{\mathbf{P}}$ wie folgt festgelegt ist (periodische RB):

$$\boxed{\mathscr{D}_{\mathbf{P}} \;=\; \big\{f, f' \in L^2(\mathbb{L}) \;\big|\; f(x+2\pi) \;=\; f(x)\big\}}$$

Verwende im folgenden

$$\boxed{\begin{array}{rcllrcl} \mathbf{P}\;\mathbf{u}_n &=& \varepsilon_n\;\mathbf{u}_n & & n \in \mathbb{Z} & & \\ \varepsilon_n &=& \hbar n & & & & \\ \mathbf{u}_n(x) &=& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(inx) & & \big\langle \mathbf{u}_m \,,\, \mathbf{u}_n \big\rangle &=& \delta_{mn} \end{array}}$$

1. Gib die Eigenwerte, ihre Entartung und zugehörige orthonormierte Eigenfunktionen des Operators $\mathbf{A}(a)$ an, wobei
$$\begin{aligned} \mathbf{A}(a) &= \mathbf{P}^2 + T(a) \\ T(a) &= \exp\left(-\tfrac{i}{\hbar}a\mathbf{P}\right) \qquad a \in [0,2\pi) \end{aligned}$$
Zeige, dass für $a = \frac{\pi}{\ell}$ mit $\ell \in \mathbb{Z}^+$ die Eigenwerte $\lambda_{n\ell} \;=\; \hbar^2 n^2 + \exp(-i\frac{\pi}{\ell}n)$ des Operators $\mathbf{A}(a)$ für bestimmte $n \in \mathbb{Z}$ zweifach entartet sind.

2. Gib die Matrixdarstellungen der Operatoren $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ und $\mathcal{S}(\mathbf{X})$
$$\begin{aligned} \big[\mathcal{C}(\mathbf{X})\,f\big](x) &= \cos x\; f(x) \\ \big[\mathcal{S}(\mathbf{X})\,f\big](x) &= \sin x\; f(x) \end{aligned}$$
bezüglich der Basis E_u an, wenn $\mathsf{E}_u \;=\; \big\{\mathbf{u}_n \;\big|\; n \in \mathbb{Z}\big\}$ die Menge aller orthonomierten Eigenfunktionen von $\mathbf{P}$ darstellt.

3. Die Eigenfunktionen $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{-1}$ spannen einen 3-dimensionalen Unterraum des Hilbertraums $L^2(\mathbb{L})$ auf. Gib den zugehörigen Projektionsoperator Q in Dirac-Schreibweise an. Untersuche ob $\mathsf{Q}\,L^2(\mathbb{L}) \;=\; \mathscr{H}_0$ einen bezüglich $\mathbf{P}$, $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ und $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ invarianten Unterraum von $L^2(\mathbb{L})$ darstellt.

4. Welche 3-dimensionalen Matrizen sind den Operatoren $\mathbf{P}$, $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ und $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ im Unterraum $\mathscr{H}_0$ bezüglich E_u zugeordnet? Gib die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von $\mathsf{Q}\,\mathcal{C}(\mathbf{X})\mathsf{Q}$ und $\mathsf{Q}\,\mathcal{S}(\mathbf{X})\mathsf{Q}$ an.

5. Zeige, daß die Operatoren $\mathsf{Q}\,\mathcal{C}(\mathbf{X})\mathsf{Q}$ und $\mathsf{Q}\,\mathcal{S}(\mathbf{X})\mathsf{Q}$ nicht vertauschen, obwohl die Vertauschungsregel $\big[\mathcal{C}(\mathbf{X})\,,\,\mathcal{S}(\mathbf{X})\big] \;=\; \mathbf{O}$ gilt. Gib den Grund dafür an.

[1] Mathematischer Formalismus:

Eigenwertproblem selbstadjungierter Operatoren und Normaloperatoren – Matrixdarstellung von Operatoren bezüglich endlich-dimensionaler Unterräume

Beispiel 6: Der Impulsoperator

$$\big[\mathbf{P}f\big](x) \;=\; -\,i\hbar\partial_x f(x)$$

stellt im separablen Hilbertraum $\mathscr{H} = L^2([0,2\pi]) = L^2(\mathbb{L})$ einen selbstadjungierten Operator dar, wenn sein Definitionsbereich $\mathscr{D}_{\mathbf{P}}$ wie folgt festgelegt ist (periodische RB):

$$\boxed{\mathscr{D}_{\mathbf{P}} \;=\; \big\{f, f' \in L^2(\mathbb{L}) \;\big|\; f(x+2\pi) \;=\; f(x)\big\}}$$

Verwende im folgenden

$$\boxed{\begin{array}{rcll} \mathbf{P}\,\mathbf{u}_n & = & \varepsilon_n\,\mathbf{u}_n & n \in \mathbb{Z} \\ \mathbf{u}_n & \leftrightarrow & \big|\,n\big\rangle & \\ \varepsilon_n & = & \hbar n & \\ \mathbf{u}_n(x) & = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(inx) & \big\langle \mathbf{u}_m\,,\,\mathbf{u}_n\big\rangle \;=\; \delta_{mn} \end{array}}$$

Gegeben sind $\mathbf{P}^2$ das Quadrat des Impulsoperators, der Operator $\mathbf{K}_n$ und der folgende Projektionsoperator Q_n

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n &= \big|\,+n\big\rangle\big\langle -n\,\big| + \big|\,-n\big\rangle\big\langle +n\,\big| \\ \mathsf{Q}_n &= \big|\,+n\big\rangle\big\langle +n\,\big| + \big|\,-n\big\rangle\big\langle -n\,\big| \end{aligned}$$

wobei $n =$ fix mit $n > 0$ angenommen ist.

1. Zeige, dass der Operator $\mathbf{K}_n$ selbstadjungiert ist.

2. Zeige, dass $\mathbf{K}_n\,\mathbf{K}_n = \mathsf{Q}_n$ gilt und $\mathbf{K}_n$ damit kein Projektionsoperator ist.

3. Gib die EW–Gleichung für den Operator $\mathbf{P}^2$ an.

4. Berechne die Matrixdarstellung von $\mathsf{Q}_n\,\mathbf{K}_n\,\mathsf{Q}_n$ bezüglich der Basis $\mathsf{E}_u = \big\{\mathbf{u}_m \,\big|\, m \in \mathbb{Z}\big\}$, dh. bezüglich der Basis $\big\{\,\big|\,m\big\rangle : m \in \mathbb{Z}\big\}$.

5. Zeige, dass $\mathbf{P}^2$ und $\mathbf{K}_n$ vertauschbare Operatoren sind und daher gemeinsame Eigenvektoren besitzen.

6. Berechne die gemeinsamen Eigenvektoren von $\mathbf{P}^2$ und $\mathbf{K}_n$.

7. Gib den Grund an, warum die gemeinsamen Eigenvektoren von $\mathbf{P}^2$ und $\mathbf{K}_n$ bis auf einen beliebigen Phasenfaktor eindeutig festgelegt sind.

[1] Mathematischer Formalismus:

Orthonormierte Basissysteme – Basiswechsel – Matrixdarstellung von Operatoren

(siehe auch **Grau:** I.3, I.11)

Beispiel 7: Im Hilbertraum $\mathbb{C}^N$ ($=$ N–dimensionaler unitärer Raum) sind zwei Orthonormalbasen gegeben.

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_a &= \{ \,|\, a_1 \rangle, \,|\, a_2 \rangle, \ldots, \,|\, a_N \rangle\mathbf{:}\ \langle a_j \,|\, a_k \rangle \,=\, \delta_{jk} \} \\ \mathsf{E}_b &= \{ \,|\, b_1 \rangle, \,|\, b_2 \rangle, \ldots, \,|\, b_N \rangle\mathbf{:}\ \langle b_j \,|\, b_k \rangle \,=\, \delta_{jk} \} \end{aligned}$$

1. Definiere einen Operator U, der den Basiswechsel von E_a zu E_b vermittelt. Zeige, daß aus der Orthonormiertheit der Elemente von E_a und E_b die Unitarität von U folgt.

2. Drücke U durch Elemente von E_a und E_b aus.

3. Ein Vektor $|\, f \rangle$ ist in der $\{a\}$-Darstellung durch die Spaltenmatrix

$$\hat{f}^{\{a\}} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}$$

gegeben. Wie lautet die Spaltenmatrix für $|\, f \rangle$ in der $\{b\}$-Darstellung und wie hängen beide zusammen?

4. Zwei lineare Operatoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind durch ihre Wirkung auf die Elemente der Basis E_a definiert.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \,|\, a_j \rangle &= \textstyle\sum_{k=1}^N \mathbf{A}_{kj} \,|\, a_k \rangle \\ \mathbf{B} \,|\, a_j \rangle &= \textstyle\sum_{k=1}^N \mathbf{B}_{kj} \,|\, a_k \rangle \end{aligned}$$

Zeige, daß aus $\mathbf{AB} = \mathbf{C} \Longleftrightarrow \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{C}}$ folgt. Gib die Matrixdarstellung von $\mathbf{A}$ bezüglich E_a und E_b an und untersuche wie beide zusammenhängen.

5. Gib die Matrixdarstellung des Operators V bezüglich E_a an, der durch

$$V \,|\, a_j \rangle = |\, a_{j+1} \rangle \quad (mod\ N)$$

definiert ist. Zeige, daß V ein unitärer Operator ist, der $V^N = \mathbf{1}$ erfüllt.

6. Welche zusätzlichen Eigenschaften müssen die Matrizen haben, die $\mathbf{A}$ in der $\{a\}$- und $\{b\}$-Darstellung zugeordnet sind, wenn $\mathbf{A}$ hermitesch ist ?

[1] Mathematischer Formalismus:

Eigenwertproblem eines selbstadjungierten Operators

(siehe auch **Grau:** I.23)

Beispiel 8: Im Hilbertraum $\mathbb{C}^3$ (= 3–dimensionaler unitärer Raum) ist eine Orthonormalbasis gegeben, deren Elemente mit $|\, a_j \rangle$ bezeichnet sind.

$$\mathsf{E}_a \;=\; \left\{ |\, a_1 \rangle,\, |\, a_2 \rangle,\, |\, a_3 \rangle :\; \langle a_j \,|\, a_k \rangle \;=\; \delta_{jk} \right\}$$

Weiters ist ein linearer Operator $\mathbf{A}$ durch seine Wirkung auf die Elemente der Basis E_a definiert.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \,|\, a_1 \rangle &= |\, a_2 \rangle \\ \mathbf{A} \,|\, a_2 \rangle &= |\, a_1 \rangle + |\, a_3 \rangle \\ \mathbf{A} \,|\, a_3 \rangle &= |\, a_2 \rangle \end{aligned}$$

1. Zeige, daß $\mathbf{A}$ hermitesch ist. Was bedeudet diese Eigenschaft für das Eigenwertspektrum von $\mathbf{A}$?
2. Bestimme die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ mit Hilfe der $\{a\}$-Darstellung. Gib die Entartung der Eigenwerte an.
3. Bestimme mit Hilfe der $\{a\}$-Darstellung die zugehörigen Eigenvektoren von $\mathbf{A}$.
4. Gib die Matrixdarstellung von $\mathbf{A}$ bezüglich der Basis E_e an, wenn E_e die Menge der orthonormierten Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ bezeichnet. Existiert ein zu $\mathbf{A}$ inverser Operator $\mathbf{A}^{-1}$?
5. Gib allgemein und in der $\{a\}$- und in der $\{b\}$-Darstellung die Spektraldarstellung von $\mathbf{A}$ an. Welche Eigenschaften haben die Projektionsoperatoren, die den Eigenwerten von $\mathbf{A}$ zugeordnet sind? Zeige, daß sie paarweise orthogonale Unterräume von $\mathbb{C}^3$ definieren.
6. Gib die Zerlegung der Einheit an.

[1] Mathematischer Formalismus:

Eigenwertproblem eines Normaloperators

(siehe auch **Grau:** I.23)

Beispiel 9: Im Hilbertraum $\mathbb{C}^3$ (= 3–dimensionaler unitärer Raum) ist eine Orthonormalbasis gegeben, deren Elemente mit $\mid a_j \rangle$ bezeichnet sind.

$$\mathsf{E}_a \;=\; \{\, \mid a_1\rangle, \mid a_2\rangle, \mid a_3\rangle : \langle a_j \mid a_k\rangle \;=\; \delta_{jk}\}$$

Weiters ist eine Schar von linearen Operatoren $\{\mathbf{N}(\beta) \mid \beta \in [0, 2\pi)\}$ durch ihre Wirkung auf die Elemente der Basis E_a definiert.

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{N}(\beta) \mid a_1\rangle & = & e^{i\beta} \mid a_3\rangle \\ \mathbf{N}(\beta) \mid a_2\rangle & = & e^{i\beta} \mid a_2\rangle \\ \mathbf{N}(\beta) \mid a_3\rangle & = & e^{i\beta} \mid a_1\rangle \end{array} \qquad \beta \in [0, 2\pi)$$

1. Gib die Matrixdarstellung von $\mathbf{N}(\beta)$ bezüglich E_a an.
2. Welche Eigenschaften (hermitesch, normal, unitär, idempotent) haben die Operatoren $\mathbf{N}(\beta)$?
3. Bestimme die Eigenwerte von $\mathbf{N}(\beta)$ mit Hilfe der $\{a\}$-Darstellung. Gib die Entartung der Eigenwerte an. Für welche Werte von $\beta \in [0, 2\pi)$ sind die zugehörigen Operatoren $\mathbf{N}(\beta)$ hermitesch?
4. Bestimme mit Hilfe der $\{a\}$-Darstellung die zugehörigen Eigenvektoren von $\mathbf{N}(\beta)$.
5. Gib allgemein und in der $\{a\}$-Darstellung die Spektraldarstellung von $\mathbf{N}(\beta)$ an.
6. Existiert ein zu $\mathbf{N}(\beta)$ inverser Operator $\mathbf{N}(\beta)^{-1}$?
7. Gib die Zerlegung der Einheit und die Vollständigkeitsrelation an. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Projektionsoperatoren, die zu den Eigenwerten von $\mathbf{N}(\beta)$ gehören.
8. Gibt es echte Unterräume von $\mathbb{C}^3$, die bezüglich $\mathbf{N}(\beta)$ invariant sind? Wenn ja, welche?

[1] Mathematischer Formalismus:

Vertauschbare Operatoren – Gemeinsame Eigenvektoren – Vollständiger Satz vertauschbarer hermitescher Operatoren

(siehe **Grau:** I.24)

Beispiel 10: Im Hilbertraum $\mathbb{C}^3$ (= 3–dimensionaler unitärer Raum) ist eine Orthonormalbasis gegeben, deren Elemente mit $\mid a_j \rangle$ bezeichnet sind.

$$\mathsf{E}_e \;=\; \{ \mid e_1 \rangle, \mid e_2 \rangle, \mid e_3 \rangle \colon \langle e_j \mid e_k \rangle \;=\; \delta_{jk} \}$$

Weiters sind zwei lineare Operatoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ durch ihre Wirkung auf die Elemente der Basis E_e definiert.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \mid e_1 \rangle &= 3 \mid e_1 \rangle - i\sqrt{2} \mid e_2 \rangle + \mid e_3 \rangle \\
\mathbf{A} \mid e_2 \rangle &= i\sqrt{2} \mid e_1 \rangle + 2 \mid e_2 \rangle - i\sqrt{2} \mid e_3 \rangle \\
\mathbf{A} \mid e_3 \rangle &= \mid e_1 \rangle + i\sqrt{2} \mid e_2 \rangle + 3 \mid e_3 \rangle \\
\\
\mathbf{B} \mid e_1 \rangle &= \mid e_1 \rangle + i\sqrt{2} \mid e_2 \rangle + \mid e_3 \rangle \\
\mathbf{B} \mid e_2 \rangle &= -i\sqrt{2} \mid e_1 \rangle + i\sqrt{2} \mid e_3 \rangle \\
\mathbf{B} \mid e_3 \rangle &= \mid e_1 \rangle - i\sqrt{2} \mid e_2 \rangle + \mid e_3 \rangle
\end{aligned}$$

1. Gib die Matrixdarstellung von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ bezüglich E_e an.
2. Zeige, daß die Operatoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ selbstadjungiert und vertauschbar sind.
3. Bestimme die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ und deren Entartung sowie ein Orthonormalsystem $\mathsf{E}_f = \{ \mid f_1 \rangle, \mid f_2 \rangle, \mid f_3 \rangle \}$ gemeinsamer Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.
4. Gib die Matrixdarstellung von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ bezüglich der Basis E_f an.
5. Existiert $\mathbf{A}^{-1}$ und $\mathbf{B}^{-1}$? Wenn ja, gib ihre Wirkung auf die Elemente der Basis E_e an.
6. Gib die Zerlegung der Einheit und die Spektraldarstellungen für die Operatoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ an.

[1] Mathematischer Formalismus:

Eigenwertproblem, unitäre Operatoren, äquivalente Basen, Projektionsoperatoren, Spektralzerlegung (Mathematische Schreibweise)

Beispiel 11: Im Hilbertraum $\mathbb{C}^2$ (2-dimensionaler unitärer Raum) ist eine **Orthonormalbasis** $\mathsf{E}_e = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ mit $\langle \mathbf{e}_j\,,\mathbf{e}_k \rangle = \delta_{jk}$ und eine **Nicht–Orthonormalbasis** $\mathsf{E}_w = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ gegeben, wobei die Elemente dieser Basen durch folgende Transformationen verknüpft sind.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \tfrac{1}{4}(\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2) \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Der Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ ist durch seine Wirkung auf die Elemente der Basis E_w definiert.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\,\mathbf{w}_1 &= \tfrac{\hbar\omega}{2}\big(-3\mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_2\big) \\ \mathbf{H}\,\mathbf{w}_2 &= \tfrac{\hbar\omega}{2}\big(+4\mathbf{w}_1 + 3\mathbf{w}_2\big) \end{aligned}$$

1. Berechne die Matrixdarstellung von $\mathbf{H}$ bezüglich der Basis E_w.
2. Berechne die Matrixdarstellung von $\mathbf{H}$ bezüglich der Basis E_e.
3. Vergleiche die Matrixdarstellungen $\mathbf{H}^{\{w\}}$ und $\mathbf{H}^{\{e\}}$ und kommentiere das Ergebnis.
4. Berechne die Ausdrücke $\langle \mathbf{w}_j\,,\mathbf{H}\mathbf{w}_k \rangle$ und vergleiche die Resultate mit $\langle \mathbf{e}_\ell\,,\mathbf{H}\mathbf{e}_m \rangle$ und kommentiere das Ergebnis.
5. Zeige, dass $\mathbf{H}$ hermitesch ist und löse das Eigenwertproblem für $\mathbf{H}$, dh. gib seine Eigenwerte E_n und zugehörige orthonormierte Eigenzustände $\mathbf{u}_n$ für $n = 1, 2$ an.
6. Drücke die Eigenzustände $\mathbf{u}_n$ für $n = 1, 2$ auch bezüglich der Elemente der Basis E_w aus.
7. Berechne $U(t)\,\mathbf{w}_j$ für $j = 1, 2$ und zeige, daß der Operator der zeitlichen Entwicklung $U(t) = \exp\big\{ -\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}t\big\}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ein unitärer Operator ist.
8. Gib die Eigenwerte $\epsilon_n(t)$ und zugehörigen Eigenzustände $\mathbf{z}_n(t)$ mit $n = 1, 2$ des Operators der zeitlichen Entwicklung $U(t)$ an.
9. Zeige, dass die Basen $\{\mathbf{e}_j \mid j = 1, 2\}$, $\{\mathbf{u}_n(0) \mid n = 1, 2\}$ und schließlich $\{\mathbf{z}_n(t) \mid n = 1, 2\}$ äquivalente Orthonormalbasen von $\mathbb{C}^2$ sind.
10. Zeige, daß die Operatoren $\mathsf{Q}_n = \mathbf{u}_n \blacksquare \mathbf{u}_n{}^\dagger$ (dyadisches Produkt) für $n = 1, 2$ Projektionsoperatoren sind. Gib ihre Matrixdarstellung bezüglich der Basis E_w und bezüglich $\{\mathbf{u}_n \mid n = 1, 2\}$ an. Zeige, daß wegen $\mathsf{Q}_n\,\mathsf{Q}_m = \delta_{mn}\mathsf{Q}_n$ der Zustandsraum $\mathbb{C}^2$ in die direkte Summe von zwei 1-dimensionalen orthogonalen Unterräumen zerfällt.

[1] Mathematischer Formalismus:

Projektionsoperatoren – Eigenwertproblem | Wahrscheinlichkeiten – Erwartungswerte – Unschärfen

Beispiel 12: Im Hilbertraum $\mathbb{C}^2$ (= 2–dimensionaler unitärer Raum) ist eine Orthonormalbasis $\mathsf{E} = \{ \mid e_1 \rangle, \mid e_2 \rangle \}$ mit $\langle e_j \mid e_k \rangle = \delta_{jk}$ und der Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ gegeben, der durch seine Wirkung auf die Basis E definiert ist.

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \mid e_1 \rangle &= \tfrac{\hbar\omega}{2} \mid e_2 \rangle \\ \mathbf{H} \mid e_2 \rangle &= \tfrac{\hbar\omega}{2} \mid e_1 \rangle \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von $\mathbf{H}$, zugehörige Eigenzustände, bzw. stationären Zustände und die zeitliche Entwicklung der Elemente $U(t) \mid e_j \rangle = \mid e_j(t) \rangle$ sind wie folgt gegeben: (siehe Beispiel **MF 1**)

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \mid u_n \rangle &= E_n \mid u_n \rangle \; ; \; E_n = \tfrac{\hbar\omega}{2}(-1)^{n-1} \; ; \; n = 1,2 \\ \mid u_n \rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \{ \mid e_1 \rangle + (-1)^{n-1} \mid e_2 \rangle \} \\ \mid u_n(t) \rangle &= \mid u_n \rangle \, e^{-i(\omega/2)(-1)^{n-1} t} \\ \mid e_1(t) \rangle &= \cos(\tfrac{\omega t}{2}) \mid e_1 \rangle - i \sin(\tfrac{\omega t}{2}) \mid e_2 \rangle \\ \mid e_2(t) \rangle &= -i \sin(\tfrac{\omega t}{2}) \mid e_1 \rangle + \cos(\tfrac{\omega t}{2}) \mid e_2 \rangle \end{aligned}$$

1. Nimm an, dass zur Zeit $t = 0$ das System durch den folgenden nicht–normierten reinen Zustand gegeben ist:

$$\mid \psi(0) \rangle = (2 - i) \mid e_1 \rangle + (1 + i\sqrt{3}) \mid e_2 \rangle$$

2. Berechne den Erwartungswert und die Unschärfe vom Hamiltonoperator $\mathbf{H}$, wenn sich das System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $\mid \psi(0) \rangle$ befindet.

3. Berechne den Erwartungswert und die Unschärfe vom Hamiltonoperator $\mathbf{H}$, wenn sich das System zur Zeit $t > 0$ im Zustand $\mid \psi(t) \rangle$ befindet, der durch die zeitliche Entwicklung des Anfangszustandes $\mid \psi(0) \rangle$ definiert ist.

4. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Messung der Energie der Eigenwert $+\frac{\hbar\omega}{2}$ gemessen wird, wenn sich das System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $\mid \psi(0) \rangle$ befindet.

5. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Messung der Energie der Eigenwert $-\frac{\hbar\omega}{2}$ gemessen wird, wenn sich das System zur Zeit $t = 0$ im Zustand $\mid \psi(0) \rangle$ befindet. Zeige, dass die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten 1 ergibt. Begründe das Resultat.

6. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Messung der Energie der Eigenwert $+\frac{\hbar\omega}{2}$ gemessen wird, wenn sich das System zur Zeit $t > 0$ im Zustand $\mid \psi(t) \rangle$ befindet.