[1] Mathematischer Formalismus:

Zusatz zum Beispiel MF.01: Stationäre Zustände, Zeitliche Entwicklung, Erwartungswerte, Unschärfen, Wahrscheinlichkeiten

Zusatz zum Beispiel 1: Im Hilbertraum $\mathbb{C}^2$ (2–dimensionaler unitärer Vektorraum) ist eine Orthonormalbasis $\mathsf{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ mit $\langle \mathbf{e}_j \,, \mathbf{e}_k \rangle = \delta_{jk}$ und der Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ gegeben, der durch seine Wirkung auf die Elemente der Basis E definiert ist.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{H}\,\mathbf{e}_1 &= \tfrac{\hbar\omega}{2}\,\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{H}\,\mathbf{e}_2 &= \tfrac{\hbar\omega}{2}\,\mathbf{e}_1 \end{aligned}}$$

1. Nimm an, dass zur Zeit $t = 0$ das System durch den reinen Zustand
$$\mathbf{z}(0) \;=\; (1 - i\sqrt{3})\,\mathbf{e}_1 + (2 + i)\,\mathbf{e}_2$$
gegeben ist. Bestimme die Normierungskonstante so, dass $\|\mathbf{z}(0)\|^2 = 1$ gilt.
2. Drücke den auf 1 normierten Zustand $\widehat{\mathbf{z}}(0)$ als Linearkombination der Elemente der Eigenbasis $\mathsf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ des Hamiltonoperators $\mathbf{H}$ aus.
3. Berechne die zeitliche Entwicklung $\widehat{\mathbf{z}}(t)$ des Anfangszustandes $\widehat{\mathbf{z}}(0)$ für $t > 0$ mit Hilfe des Operators der zeitlichen Entwicklung $U(t) = \exp\{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{H}t\}$.
4. Berechne den Erwartungswert für den Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ zur Zeit $t = 0$, wenn sich das System im reinen Zustand $\mathbf{z}(0)$ befindet.
5. Berechne den Unschärfe der Messergebnisse um den Mittelwert $\langle \mathbf{H} \rangle_0$ zur Zeit $t = 0$, wenn sich das System im reinen Zustand $\mathbf{z}(0)$ befindet.
6. Berechne den Erwartungswert für den Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ zur Zeit $t > 0$, wenn sich das System im reinen Zustand $\mathbf{z}(t)$ befindet.
7. Berechne den Unschärfe der Messergebnisse um den Mittelwert $\langle \mathbf{H} \rangle_t$ zur Zeit $t > 0$, wenn sich das System im reinen Zustand $\mathbf{z}(t)$ befindet.
8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zur Zeit $t = 0$ die Grundzustandsenergie $(\omega > 0)$ zu messen, wenn sich das System im Zustand $\mathbf{z}(0)$ befindet.
9. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zur Zeit $t = 0$ die Energie $(\omega > 0)$ des ersten angeregten Zustandes zu messen, wenn sich das System im Zustand $\mathbf{z}(0)$ befindet.
10. Zeige, dass die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten 1 ergibt.
11. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zur Zeit $t > 0$ die Grundzustandsenergie $(\omega > 0)$ zu messen, wenn sich das System im Zustand $\mathbf{z}(t)$ befindet.