[1] Mathematischer Formalismus:

Zusatz zum Beispiel **MF.11**: Matrixdarstellung von Operatoren

Zusatz zum Beispiel 11: Gegeben sind die beiden linearen Operatoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$, die durch ihre Wirkung auf die Elemente $\mathbf{w}_k$ der **nicht–orthogonalen Basis** $\mathsf{E}_w = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ definiert sind.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\,\mathbf{w}_1 &= +2\mathbf{w}_1 - i\mathbf{w}_2 \\ \mathbf{A}\,\mathbf{w}_2 &= -3i\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\,\mathbf{w}_1 &= +i\mathbf{w}_2 \\ \mathbf{B}\,\mathbf{w}_2 &= +\mathbf{w}_1 + 3i\mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

Benutze die Formel

$$\mathbf{F}\,\mathbf{w}_k = \sum_{\ell=1}^{2} \mathbf{F}_{\ell k}^{\{\mathbf{w}\}}\,\mathbf{w}_\ell$$

zur Berechnung der Matrixdarstellung des linearen Operators $\mathbf{F}$ bezüglich der Basis E_w, wenn $\mathbf{F}$ einen beliebigen linearen Operator darstellt, der $\mathbb{C}^2$ auf $\mathbb{C}^2$ abbildet.

1. Berechne die **Matrixdarstellung** von $\mathbf{A}$ bezüglich der Basis E_w.
2. Berechne die **Matrixdarstellung** von $\mathbf{B}$ bezüglich der Basis E_w.
3. Berechne die Wirkung des Operators $\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{B}$ bezüglich der Basis E_w und zeige, dass die Matrixgleichung $\mathbf{C}^{\{\mathbf{w}\}} = \mathbf{A}^{\{\mathbf{w}\}}\,\mathbf{B}^{\{\mathbf{w}\}}$ gilt.
4. Berechne die Wirkung des Operators $\mathbf{D} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}$ bezüglich der Basis E_w und zeige, dass die Matrixgleichung $\mathbf{D}^{\{\mathbf{w}\}} = \mathbf{B}^{\{\mathbf{w}\}}\,\mathbf{A}^{\{\mathbf{w}\}}$ gilt.
5. Zeige, dass $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ nicht–singuläre Operatoren sind.
6. Wie kann gezeigt werden, ob $\mathbf{A}$ (und analog dazu $\mathbf{B}$) ein hermitescher oder nicht–hermitescher Operator ist.