[5] Spin – Drehoperatoren:

Spinoperator – Drehoperatoren – Transformationsgesetz von Spinzuständen

(siehe **Grau:** VI.21, VI.6, VI.5)

Beispiel 1: Im Spinhilbertraum $\mathscr{H}_{\text{Spin}} = \mathbb{C}^2$ eines Teilchens mit Spin $s = \frac{1}{2}$ können die Drehoperatoren wie folgt dargestellt werden

$$\begin{aligned} U(\phi, \underline{e}) &= \exp\left\{-\tfrac{i}{\hbar}\phi\, \underline{e} \cdot \vec{\mathbf{S}}\right\} = \exp\left\{-i\tfrac{\phi}{2}\, \underline{e} \cdot \vec{\boldsymbol{\sigma}}\right\} \\ V(\alpha, \beta, \gamma) &= U(\alpha, \underline{e}_z)\, U(\beta, \underline{e}_y)\, U(\gamma, \underline{e}_z) = V(\omega) \end{aligned}$$

wobei $\vec{\mathbf{S}} = (\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y, \mathbf{S}_z)^\top$ den Spinoperator mit seinen kartesischen Komponenten $\mathbf{S}_x$, $\mathbf{S}_y$, $\mathbf{S}_z$ definiert. Im ersten Fall bedeutet $\underline{e} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$ die Drehachse und $\phi \in [0, 4\pi)$ den Drehwinkel der Drehung. Im zweiten Fall legen die Eulerwinkel α, β, γ die Drehoperatoren fest. Verwende weiters die Definitionen $\mathbf{S}_j = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_j$ mit $j = 1, 2, 3$ wobei $j = 1 = x$, $j = 2 = y$, $j = 3 = z$ bedeuten und als Orthonormalbasis die Eigenzustände $\{\,|\,m\rangle = |\,\frac{1}{2}, m\rangle\,; m = \pm\frac{1}{2} = \pm\}$ von $\mathbf{S}_z$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_x\,|\,+\rangle &= (+1)\,|\,-\rangle & \qquad \boldsymbol{\sigma}_x\,|\,-\rangle &= (+1)\,|\,+\rangle \\ \boldsymbol{\sigma}_y\,|\,+\rangle &= (+i)\,|\,-\rangle & \qquad \boldsymbol{\sigma}_y\,|\,-\rangle &= (-i)\,|\,+\rangle \\ \boldsymbol{\sigma}_z\,|\,+\rangle &= (+1)\,|\,+\rangle & \qquad \boldsymbol{\sigma}_z\,|\,-\rangle &= (-1)\,|\,-\rangle \end{aligned}$$

1. Beweise die Formeln

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_x\boldsymbol{\sigma}_y &= i\boldsymbol{\sigma}_z \iff \boldsymbol{\sigma}_y\boldsymbol{\sigma}_x = -i\boldsymbol{\sigma}_z \\ \boldsymbol{\sigma}_y\boldsymbol{\sigma}_z &= i\boldsymbol{\sigma}_x \iff \boldsymbol{\sigma}_z\boldsymbol{\sigma}_y = -i\boldsymbol{\sigma}_x \\ \boldsymbol{\sigma}_z\boldsymbol{\sigma}_x &= i\boldsymbol{\sigma}_y \iff \boldsymbol{\sigma}_x\boldsymbol{\sigma}_z = -i\boldsymbol{\sigma}_y \end{aligned}$$

2. Beweise die Formel

$$U(\phi, \underline{e}) = \cos\tfrac{\phi}{2}\,\mathbf{1} - i\sin\tfrac{\phi}{2}\,\underline{e} \cdot \vec{\boldsymbol{\sigma}}$$

3. Beweise das Transformationsgesetz für Spinoren

$$V(\omega)\,|\,m\rangle = \sum_{m'=1/2}^{-1/2} \mathbf{D}^{1/2}_{m'm}(\omega)\,|\,m'\rangle$$

$$\mathbf{D}^{1/2}(\omega) = \begin{bmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{+i\alpha/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{+i\gamma/2} \end{bmatrix}$$

4. Zeige, daß für jeden beliebigen Zustand $|\,\chi\rangle \in \mathbb{C}^2$ mit beliebiger Drehachse $\underline{e}$ und dem speziellen Drehwinkel $\phi = 2\pi$

$$U(2\pi, \underline{e})\,|\,\chi\rangle = (-1)\,|\,\chi\rangle$$

gilt, wobei $|\,\chi\rangle = a\,|\,+\rangle + b\,|\,-\rangle$ mit $|\,a\,|^2 + |\,b\,|^2 = 1$ angenommen ist.

[5] Spin – Drehoperatoren:

Spinoperator – Drehoperatoren – Transformationsgesetz des Spinoperators
(siehe **Grau:** VI.21, VI.6, VI.5, siehe auch SD1)

Beispiel 2: Im Spinhilbertraum $\mathscr{H}_{\text{Spin}} = \mathbb{C}^2$ eines Teilchens mit Spin $s = \frac{1}{2}$ können die Drehoperatoren wie folgt dargestellt werden

$$\begin{aligned} U(\phi, \underline{e}) &= \exp\left\{-\tfrac{i}{\hbar}\phi\, \underline{e} \cdot \vec{\mathbf{S}}\right\} = \exp\left\{-i\tfrac{\phi}{2}\, \underline{e} \cdot \vec{\boldsymbol{\sigma}}\right\} \\ V(\alpha, \beta, \gamma) &= U(\alpha, \underline{e}_z)\, U(\beta, \underline{e}_y)\, U(\gamma, \underline{e}_z) = V(\omega) \end{aligned}$$

wobei $\vec{\mathbf{S}} = (\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y, \mathbf{S}_z)^\top$ den Spinoperator mit seinen kartesischen Komponenten $\mathbf{S}_x$, $\mathbf{S}_y$, $\mathbf{S}_z$ definiert. Im ersten Fall bedeutet $\underline{e} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$ die Drehachse und $\phi \in [0, 4\pi)$ den Drehwinkel der Drehung. Im zweiten Fall legen die Eulerwinkel α, β, γ die Drehoperatoren fest. Verwende weiters die Definitionen $\mathbf{S}_j = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_j$ mit $j = 1, 2, 3$ wobei $j = 1 = x$, $j = 2 = y$, $j = 3 = z$ bedeuten und als Orthonormalbasis die Eigenzustände $\{\,|\,m\rangle = |\,\frac{1}{2}, m\rangle\,; m = \pm\frac{1}{2} = \pm\}$ von $\mathbf{S}_z$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_x\,|\,+\rangle &= (+1)\,|\,-\rangle & \qquad \boldsymbol{\sigma}_x\,|\,-\rangle &= (+1)\,|\,+\rangle \\ \boldsymbol{\sigma}_y\,|\,+\rangle &= (+i)\,|\,-\rangle & \qquad \boldsymbol{\sigma}_y\,|\,-\rangle &= (-i)\,|\,+\rangle \\ \boldsymbol{\sigma}_z\,|\,+\rangle &= (+1)\,|\,+\rangle & \qquad \boldsymbol{\sigma}_z\,|\,-\rangle &= (-1)\,|\,-\rangle \end{aligned}$$

1. Zeige, dass der Spinoperator $\vec{\mathbf{S}} = (\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y, \mathbf{S}_z)^\top$ sich bezüglich Drehungen wie folgt transformiert.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j(\omega) &= V(\omega)\,\mathbf{S}_j\,V(\omega)^\dagger = \textstyle\sum_{k=1}^3 \mathbb{D}_{kj}(\omega)\,\mathbf{S}_k \quad \Longrightarrow \quad \vec{\mathbf{S}}(\omega) = \mathbb{D}(\omega)^\top\,\vec{\mathbf{S}} \\ \mathbb{D}(\omega) &= \mathbb{D}(\alpha,0,0)\,\mathbb{D}(0,\beta,0)\,\mathbb{D}(0,0,\gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(\alpha,0,0) &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbb{D}(0,\beta,0) &= \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \\ \mathbb{D}(0,0,\gamma) &= \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Beweise die äquivalenten Vertauschungsregeln

$$[\mathbf{S}_j\,,\mathbf{S}_k] = i\hbar\sum_\ell \epsilon_{jk\ell}\,\mathbf{S}_\ell \Longleftrightarrow [\mathbf{S}_j(\omega)\,,\mathbf{S}_k(\omega)] = i\hbar\sum_\ell \epsilon_{jk\ell}\,\mathbf{S}_\ell(\omega)$$

[5] Spin – Drehoperatoren:

Spinoperator – Transformationsgesetz des Spinoperators – Erwartungswert und Unschärfe des Spinoperators
(siehe **Grau:** VI.21, VI.6, VI.5, siehe auch **SD1** und **SD2**)

Beispiel 3: Im Spinhilbertraum $\mathscr{H}_{\text{Spin}} = \mathbb{C}^2$ eines Teilchens mit Spin $s = \frac{1}{2}$ können die Drehoperatoren wie folgt dargestellt werden

$$\boxed{\begin{aligned} U(\phi,\underline{e}) &= \exp\left\{-\tfrac{i}{\hbar}\phi\,\underline{e}\,\mathbf{.}\,\vec{\mathbf{S}}\right\} = \exp\left\{-i\tfrac{\phi}{2}\,\underline{e}\,\mathbf{.}\,\vec{\boldsymbol{\sigma}}\right\} \\ V(\alpha,\beta,\gamma) &= U(\alpha,\underline{e}_z)\,U(\beta,\underline{e}_y)\,U(\gamma,\underline{e}_z) = V(\omega) \end{aligned}}$$

wobei $\vec{\mathbf{S}} = \big(\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y, \mathbf{S}_z\big)^{\mathsf{T}}$ den Spinoperator mit seinen kartesischen Komponenten $\mathbf{S}_x$, $\mathbf{S}_y$, $\mathbf{S}_z$ definiert. Im ersten Fall bedeutet $\underline{e} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$ die Drehachse und $\phi \in [0, 4\pi)$ den Drehwinkel der Drehung. Im zweiten Fall legen die Eulerwinkel α, β, γ die Drehoperatoren fest. Verwende weiters die Definitionen $\mathbf{S}_j = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_j$ mit $j = 1, 2, 3$ wobei $j = 1 = x$, $j = 2 = y$, $j = 3 = z$ bedeuten und als Orthonormalbasis die Eigenzustände $\big\{\,|\,m\big\rangle = \big|\,\frac{1}{2}, m\big\rangle\,; m = \pm\frac{1}{2} = \pm\big\}$ von $\mathbf{S}_z$.

1. Nimm an, dass das System $(t = 0)$ durch die folgenden reinen Zustände beschrieben wird:

$$\begin{array}{lrcl} \text{(a)} & |\,\chi\rangle &=& |\,+\,\rangle \\ \text{(b)} & |\,\chi\rangle &=& |\,-\,\rangle \\ \text{(c)} & |\,\chi\rangle &=& \frac{1}{\sqrt{3}}\,|\,+\,\rangle + \frac{1-i}{\sqrt{3}}\,|\,-\,\rangle \end{array}$$

   Berechne die zugehörigen Erwartungswerte und Unschärfen von $\vec{\mathbf{S}}$, wobei

$$\big\langle\vec{\mathbf{S}}\big\rangle = \begin{bmatrix} \langle\mathbf{S}_x\rangle \\ \langle\mathbf{S}_y\rangle \\ \langle\mathbf{S}_z\rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad \big\langle\Delta\vec{\mathbf{S}}\big\rangle = \begin{bmatrix} (\langle\mathbf{S}_x^2\rangle - \langle\mathbf{S}_x\rangle^2)^{1/2} \\ (\langle\mathbf{S}_y^2\rangle - \langle\mathbf{S}_y\rangle^2)^{1/2} \\ (\langle\mathbf{S}_z^2\rangle - \langle\mathbf{S}_z\rangle^2)^{1/2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

2. Kommentiere den Unterschied zwischen den Erwartungswerten $\big\langle\vec{\mathbf{S}}\big\rangle = \big(\langle m\,|\,\mathbf{S}_x\,|\,m\rangle, \langle m\,|\,\mathbf{S}_y\,|\,m\rangle, \langle m\,|\,\mathbf{S}_z\,|\,m\rangle\big)^{\mathsf{T}}$ und den Eigenzuständen $|\,m\rangle$.

3. Zeige, dass das folgende Transformationsgesetz gilt:

$$\big\langle\vec{\mathbf{S}}(\omega)\big\rangle = \mathbb{D}(\omega)^{\mathsf{T}}\,\big\langle\vec{\mathbf{S}}\big\rangle$$

4. Für welche Raumrichtungen besitzt die Projektion des Spins die Unschärfe null, wenn sich das System im Zustand (7.c) befindet und wenn der Operator der Spinprojektion bezüglich einer Richtung $\underline{e} = \big(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta\big)$ durch folgenden Ausdruck definiert ist.

$$\boxed{\mathbf{S}(\underline{e}) = \underline{e}\,\mathbf{.}\,\vec{\mathbf{S}} = \textstyle\sum_{j=1}^{3} e_j\,\mathbf{S}_j}$$

[5] Spin – Drehoperatoren:

Spinoperator – Drehoperatoren – Transformationsgesetz des Spinoperators und von Spinzuständen – Erwartungswert des Spinoperators

(siehe **Grau:** VI.4, VI.5, VI.7, VI.6)

Beispiel 4: Im Spinhilbertraum $\mathscr{H}_{\text{Spin}} = \mathbb{C}^2$ eines Teilchens mit Spin $s = \frac{1}{2}$ können die Drehoperatoren wie folgt dargestellt werden

$$\boxed{\begin{aligned} U(\phi, \underline{e}) &= \exp\left\{ -\tfrac{i}{\hbar}\phi\, \underline{e} \cdot \vec{\mathbf{S}} \right\} = \exp\left\{ -i\tfrac{\phi}{2}\, \underline{e} \cdot \vec{\boldsymbol{\sigma}} \right\} \\ V(\alpha, \beta, \gamma) &= U(\alpha, \underline{e}_z)\, U(\beta, \underline{e}_y)\, U(\gamma, \underline{e}_z) = V(\omega) \end{aligned}}$$

wobei $\vec{\mathbf{S}} = \left(\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y, \mathbf{S}_z\right)^{\mathsf{T}}$ den Spinoperator mit seinen kartesischen Komponenten $\mathbf{S}_x$, $\mathbf{S}_y$, $\mathbf{S}_z$ definiert. Im ersten Fall bedeutet $\underline{e} = \left(\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta\right)$ die Drehachse und $\phi \in [0, 4\pi)$ den Drehwinkel der Drehung. Im zweiten Fall legen die Eulerwinkel α, β, γ die Drehoperatoren fest. Verwende weiters die Definitionen $\mathbf{S}_j = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}_j$ mit $j = 1, 2, 3$ wobei $j = 1 = x$, $j = 2 = y$, $j = 3 = z$ bedeuten und als Orthonormalbasis die Eigenzustände $\left\{ \left| m \right\rangle = \left| \frac{1}{2}, m \right\rangle ; m = \pm\frac{1}{2} = \pm \right\}$ von $\mathbf{S}_z$.

1. Berechne die Matrixdarstellung der Paulioperatoren $\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_z$ bezüglich der Orthonormalbasis $\left\{ \left| m \right\rangle : m = \pm \right\}$.

2. Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Paulioperatoren $\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_z$ und des Operators der Spinprojektion $\underline{e} \cdot \vec{\mathbf{S}}$ für eine beliebige Richtung $\underline{e}$.

3. Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren des Operators $\boldsymbol{\sigma}_x + \boldsymbol{\sigma}_z$. Vergleiche das Ergebnis mit (2) und interpretiere das Resultat.

4. Nimm an, daß das System zum Zeitpunkt $t = 0$ durch den reinen Zustand

$$\left| \chi \right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left| + \right\rangle + \tfrac{1-i}{2} \left| - \right\rangle$$

beschrieben wird. Berechne den Erwartungswert des Spinoperators $\vec{\mathbf{S}}$.

$$\left\langle \vec{\mathbf{S}} \right\rangle = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{S}_x \rangle \\ \langle \mathbf{S}_y \rangle \\ \langle \mathbf{S}_z \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

5. Für welche Raumrichtungen besitzt die Projektion des Spins die Unschärfe null, wenn sich das System im Zustand $\left| \chi \right\rangle$ befindet und wenn der Operator der Spinprojektion bezüglich einer Richtung $\underline{e} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$ durch

$$\boxed{\mathbf{S}(\underline{e}) = \underline{e} \cdot \vec{\mathbf{S}}}$$

gegeben ist.