[8] Zeitunabhängige Störungstheorie:

Zeitunabhängige Störungstheorie: Approximation von Eigenwerten und zugehörigen Eigenzuständen

Beispiel 1: Im Hilbertraum $\mathbb{C}^2$ (= 2–dimensionaler unitärer Raum) ist eine Orthonormalbasis $\mathsf{E}_e = \{\mathbf{e}_j \,|\, j = 1, 2\}$ gegeben, deren Elemente mit $\mathbf{e}_j$ bezeichnet werden und die $\langle \mathbf{e}_j \,, \mathbf{e}_k \rangle = \delta_{jk}$ erfüllen müssen. Weiters ist der Hamiltonoperator

$$\boxed{\mathbf{H}(\xi) \;=\; \mathbf{H}_0 + \xi \mathbf{W}}$$

durch seine Wirkung auf die Elemente der Basis E_e definiert, wobei $\mathbf{H}_0$ den ungestörten Hamiltonoperator darstellt und $\mathbf{W}$ einen weiteren Operator festlegt, der die Störung beschreibt, wobei der reele Parameter $\xi \in [0, 1]$ die Stärke der Störung angibt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_0\, \mathbf{e}_1 &= \hbar\omega\, \big(3\mathbf{e}_2\big) \\
\mathbf{H}_0\, \mathbf{e}_2 &= \hbar\omega\, \big(3\mathbf{e}_1\big) \\[1ex]
\mathbf{W}\, \mathbf{e}_1 &= \hbar\omega \big(\mathbf{e}_1 + \sqrt{3}\mathbf{e}_2\big) \\
\mathbf{W}\, \mathbf{e}_2 &= \hbar\omega \big(\sqrt{3}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\big)
\end{aligned}$$

1. Gib die Matrixdarstellung von $\mathbf{H}_0$ bezüglich der Basis E_e an.
2. Gib die Matrixdarstellung von $\mathbf{W}$ bezüglich der Basis E_e an.
3. Gib die Matrixdarstellung von $\mathbf{H}(\xi)$ bezüglich der Basis E_e an.
4. Berechne die Eigenwerte, Entartung und zugehörige Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$.
5. Berechne die Eigenwerte, Entartung und zugehörige Eigenvektoren von $\mathbf{W}$.
6. Berechne die Eigenwerte, Entartung und zugehörige Eigenvektoren von $\mathbf{H}(\xi)$. Beachte dabei, dass die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren vom Parameter ξ abhängen, bzw. die Entartung der Eigenwerte ebenfalls vom Parameter ξ abhängen könnte!
7. Warum können $\mathbf{H}_0$ und $\mathbf{W}$ keine gemeinsamen Eigenvektoren haben?
8. Berechne in 1.ter Ordnung zeitunabhängiger Störungstheorie für nicht–entartete Energieeigenwerte die Energiekorrekturen zu den Eigenwerten von $\mathbf{H}_0$.
9. Berechne in 2.ter Ordnung zeitunabhängiger Störungstheorie für nicht–entartete Energieeigenwerte die Energiekorrekturen zu den Eigenwerten von $\mathbf{H}_0$.
10. Für welche Werte des Störparameters $\xi \in [0, 1]$ gibt die zeitunabhängiger Störungstheorie 1.ter und 2.ter Ordnung akzeptable Näherungen für die Eigenwerte?

[8] Zeitunabhängige Störungstheorie:

Zeitunabhängige Störungstheorie: Approximation von Eigenwerten und zugehörigen Eigenzuständen

Beispiel 2: Im Hilbertraum $\mathbb{C}^3$ (= 3–dimensionaler unitärer Raum) ist eine Orthonormalbasis $\mathsf{E}_e = \{\mathbf{e}_j \mid j = 1, 2, 3\}$ gegeben, deren Elemente mit $\mathbf{e}_j$ bezeichnet werden und die $\langle \mathbf{e}_j \,, \mathbf{e}_k \rangle = \delta_{jk}$ erfüllen müssen. Weiters ist der Hamiltonoperator

$$\mathbf{H}(\xi) \;=\; \mathbf{H}_0 + \xi \mathbf{W}$$

durch seine Wirkung auf die Elemente der Basis E_e definiert, wobei $\mathbf{H}_0$ den ungestörten Hamiltonoperator darstellt und $\mathbf{W}$ einen weiteren Operator festlegt, der die Störung beschreibt, wobei der reele Parameter $\xi \in [0, 1]$ die Stärke der Störung angibt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_0\, \mathbf{e}_1 &= \hbar\omega\, \big(3\mathbf{e}_2\big) \\
\mathbf{H}_0\, \mathbf{e}_2 &= \hbar\omega\, \big(3\mathbf{e}_1\big) \\
\mathbf{H}_0\, \mathbf{e}_3 &= \hbar\omega\, \big(3\mathbf{e}_3\big) \\[1ex]
\mathbf{W}\, \mathbf{e}_1 &= \hbar\omega \big(\mathbf{e}_1 + \sqrt{3}\mathbf{e}_2\big) \\
\mathbf{W}\, \mathbf{e}_2 &= \hbar\omega \big(\sqrt{3}\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\big) \\
\mathbf{W}\, \mathbf{e}_3 &= \hbar\omega \big(-9\,\mathbf{e}_3\big)
\end{aligned}$$

1. Gib die Matrixdarstellung von $\mathbf{H}_0$ bezüglich der Basis E_e an.
2. Gib die Matrixdarstellung von $\mathbf{W}$ bezüglich der Basis E_e an.
3. Gib die Matrixdarstellung von $\mathbf{H}(\xi)$ bezüglich der Basis E_e an.
4. Berechne die Eigenwerte, Entartung und zugehörige Eigenvektoren von $\mathbf{H}_0$.
5. Berechne die Eigenwerte, Entartung und zugehörige Eigenvektoren von $\mathbf{W}$.
6. Berechne die Eigenwerte, Entartung und zugehörige Eigenvektoren von $\mathbf{H}(\xi)$. Beachte dabei, dass die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren vom Parameter ξ abhängen, bzw. die Entartung der Eigenwerte ebenfalls vom Parameter ξ abhängen könnte.
7. Warum können $\mathbf{H}_0$ und $\mathbf{W}$ keine gemeinsamen Eigenvektoren haben?
8. Berechne in 1.ter Ordnung zeitunabhängiger Störungstheorie für nicht–entartete und entartete Energieeigenwerte die Energiekorrekturen zu den Eigenwerten von $\mathbf{H}_0$.
9. Für welche Werte des Störparameters $\xi \in [0, 1]$ gibt die zeitunabhängiger Störungstheorie 1.ter akzeptable Näherungen für die Eigenwerte?

[8] Zeitunabhängige Störungstheorie:

Zeitunabhängige Störungstheorie: Approximation von Eigenwerten und zugehörigen Eigenzuständen

Beispiel 3: Der Hilbertraum $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$ ist Zustandsraum, wobei die Bewegung eines Teilchens mit der Masse m und der Ladung q in einer Raumdimension beschrieben werden soll. Das Teilchen befindet sich im Oszillatorpotential $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$, wobei zusätzlich ein zeitlich konstantes homogenes elektrisches Feld in x–Richtung mit der Stärke ε wirken soll. Der entsprechende Hamiltonoperator hat die folgende Form

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{H}(\varepsilon) &= \mathbf{H}_0 + \varepsilon\,\mathbf{W} \\ \mathbf{H}_0 &= \frac{1}{2m}\,\mathbf{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\,\mathbf{X}^2 \\ \mathbf{W} &= -q\,\mathbf{X} \end{aligned}}$$

wobei $\mathbf{H}_0$ den ungestörten Hamiltonoperator und $\mathbf{W}$ den Störoperator beschreibt. Die Stärke des elektrischen Feldes ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) kann als variabler Parameter angesehen werden.
(siehe auch **Grau:** II.16 und V.1)

1. Gib die Eigenwerte, ihre Entarung und zugehörige Eigenfunktionen von $\mathbf{H}_0$ an.

2. Gib die Eigenwerte, ihre Entarung und zugehörige Eigenfunktionen von $\mathbf{H}(\varepsilon)$ an, wobei auszunutzen ist, dass $\mathbf{H}(\varepsilon)$ als Hamiltonoperator eines Teilchens in einem verschobenen Oszillatorpotential angesehen werden kann. Beachte, dass das Eigenwertproblem für $\mathbf{H}(\varepsilon)$ exakt gelöst werden kann.

3. Für welche Werte des Parameters $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist die Konvergenz der störungstheoretischen Entwicklung der Eigenwerte zu erwarten, wenn man von exakten Eigenwerten $E_n(\varepsilon)$ ausgeht?

4. Berechne die Energiekorrekturen zu den ungestörten Eigenwerten $E_n^0 = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ in 1.ter und 2.ter Ordnung zeitunabhängiger Störungstheorie.

5. Berechne in 1.ter und 2.ter Ordnung zeitunabhängiger Störungstheorie die Korrekturen zu den ungestörten Eigenzuständen $\big|\, n \big\rangle$ von $\mathbf{H}_0$, die sich auf Grund des Vorhandenseins der Störung ($\varepsilon \neq 0$) ergeben.

[8] Zeitunabhängige Störungstheorie:

Zeitunabhängige Störungstheorie: Approximation von Eigenwerten und zugehörigen Eigenzuständen

Beispiel 4: Der Hilbertraum $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$ ist Zustandsraum, wobei die Bewegung eines Teilchens mit der Masse m in einer Raumdimension beschrieben werden soll. Das Teilchen befindet sich im Oszillatorpotential $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2$, wobei zusätzlich ein zeitlich konstantes Oszillatorpotential $\varepsilon\, W(x) = \varepsilon\, \frac{m\omega^2}{2}x^2$ mit variabler Stärke ε wirken soll. Der entsprechende Hamiltonoperator hat die folgende Form

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\varepsilon) &= \mathbf{H}_0 + \varepsilon\, \mathbf{W} \\ \mathbf{H}_0 &= \frac{1}{2m}\,\mathbf{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\,\mathbf{X}^2 \\ \mathbf{W} &= \frac{m\omega^2}{2}\,\mathbf{X}^2 \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{H}_0$ den ungestörten Hamiltonoperator und $\mathbf{W}$ den Störoperator beschreibt. Die Stärke des zweiten Oszillatorpotentiales ($\varepsilon > -1$) wird als variabler Parameter angesehen werden.
(siehe auch **Grau:** V.2)

1. Gib die Eigenwerte, ihre Entarung und zugehörige Eigenfunktionen von $\mathbf{H}_0$ an.

2. Gib die Eigenwerte, ihre Entarung und zugehörige Eigenfunktionen von $\mathbf{H}(\varepsilon)$ an, wobei auszunutzen ist, dass $\mathbf{H}(\varepsilon)$ als Hamiltonoperator eines Teilchens in einem Oszillatorpotential mit entsprechend veränderter Stärke angesehen werden kann. Beachte, dass das Eigenwertproblem für $\mathbf{H}(\varepsilon)$ exakt gelöst werden kann.

3. Für welche Werte des Parameters $\varepsilon > -1$ ist die Konvergenz der störungstheoretischen Entwicklung der Eigenwerte zu erwarten, wenn man von exakten Eigenwerten $E_n(\varepsilon)$ ausgeht?

4. Welcher Unterschied ergibt sich zum Beispiel **3**?

5. Berechne die Energiekorrekturen zu den ungestörten Eigenwerten $E_n^0 = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ in 1.ter und 2.ter Ordnung zeitunabhängiger Störungstheorie.

6. Berechne in 1.ter und 2.ter Ordnung zeitunabhängiger Störungstheorie die Korrekturen zu den ungestörten Eigenzuständen $\big|\, n \big\rangle$ von $\mathbf{H}_0$, die sich auf Grund des Vorhandenseins der Störung ($\varepsilon > -1$) ergeben.