[3] Zeitunabhängige Schrödingergleichung:

Eigenwerte, Eigenfunktionen und Entartung von Eigenwerten

Beispiel 1: Untersuche die Entartung der Eigenwerte von selbstadjungierten Operatoren (2-dimensionale Probleme). Dabei ist unter (1) das freie Teilchen ($\longleftrightarrow L(\mathbb{R}^2) \supset L^2(\mathbb{R}^2)$), unter (2) das Teilchen im ∞-tiefen Potentialtopf ($\longleftrightarrow L_0^2(\mathbb{L}^2)$), unter (3) das freie Teilchen mit periodischen RB ($\longleftrightarrow L^2(\mathbb{L}^2)$), und unter (4) der harmonische Oszillator ($\longleftrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$) zu diskutieren. Verwende die folgenden EW-Gleichungen (1-dimensionale Probleme),

(1)	$\frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 u_k = E_k u_k$	$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(ikx)$	$k \in \mathbb{R}$	$E_k = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$
(2)	$\frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 u_n = E_n u_n$	$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{\pi}{L}nx)$	$n \in \mathbb{Z}^+$	$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\pi}{L}n)^2$
(3)	$\frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 u_n = E_n u_n$	$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\exp(i\frac{2\pi}{L}nx)$	$n \in \mathbb{Z}$	$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}(\frac{2\pi}{L}n)^2$
(4)	$(\frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^2)u_n = E_n u_n$	$u_n(x) = N_n e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}} H_n(\alpha x)$	$n \in \mathbb{Z}_0^+$	$E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$

um die entsprechenden EW-Gleichungen, die sich auf die Bewegung eines Teilchens in 2 Dimensionen beziehen, zu lösen. Setze $\mathbb{L}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1, x_2 \le L\}$. Beachte, daß die Normierungskonstanten $N_n = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}}$ der Oszillatoreigenfunktionen n-abhängig sind, wobei $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ ist.

1. (a) Berechne die EWe und zugehörigen uneigentlichen Eigenfunktionen des Hamiltonoperators $\mathbf{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2)$, der in $L(\mathbb{R}^2) \supset L^2(\mathbb{R}^2)$ definiert ist und der die Bewegung eines freien Teilchens in 2 Dimensionen beschreibt.

   (b) Gib die Entartung der EWe von $\mathbf{H}$ und die von $\mathbf{P}_1$ mit zugehörigen Eigenfunktionen bezüglich $L(\mathbb{R}^2)$ an.

2. (a) Berechne die EWe und zugehörige auf 1 normierten Eigenfunktionen des Hamiltonoperators $\mathbf{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2)$, der in $L_0^2(\mathbb{L}^2)$ definiert ist und der die Bewegung eines Teilchens im ∞-tiefen Potentialtopf in 2 Dimensionen beschreibt. Verwende

$$u(0, x_2) = u(L, x_2) = u(x_1, 0) = u(x_1, L) = 0$$

   (b) Gib die Entartung der ersten zehn EWe von $\mathbf{H}$ und allgemein die von $\mathbf{P}_1^2$ mit zugehörigen Eigenfunktionen bezüglich $L_0^2(\mathbb{R}^2)$ an.

3. (a) Berechne die EWe und zugehörige auf 1 normierten Eigenfunktionen des Hamiltonoperators $\mathbf{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2)$, der in $L^2(\mathbb{L}^2)$ definiert ist und der die Bewegung eines freien Teilchens mit periodischen Randbedingungen in 2 Dimensionen beschreibt. Verwende

$$u(x_1, x_2) = u(x_1 + L, x_2) = u(x_1, x_2 + L)$$

   (b) Gib die Entartung der ersten fünfzehn EWe von $\mathbf{H}$ und allgemein die von $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ mit zugehörigen Eigenfunktionen bezüglich $L^2(\mathbb{L}^2)$ an.

4. (a) Berechne die EWe und zugehörige auf 1 normierten Eigenfunktionen des Hamiltonoperators $\mathbf{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2) + \frac{m\omega^2}{2}(\mathbf{X}_1^2 + \mathbf{X}_2^2)$, der in $L^2(\mathbb{R}^2)$ definiert ist und der die Bewegung eines Teilchens im isotropen Oszillatorpotential in 2 Dimensionen beschreibt.

   (b) Gib die Entartung der EWe von $\mathbf{H}$ und die von $\mathbf{H}_1$ bezüglich $L^2(\mathbb{R}^2)$ an.

[3] Zeitunabhängige Schrödingergleichung:

Eigenwerte, Eigenfunktionen und Entartung von Eigenwerten

Beispiel 2: Untersuche die Entartung der Eigenwerte von selbstadjungierten Operatoren (3-dimensionale Probleme). Dabei ist unter (1) das freie Teilchen ($\longleftrightarrow L(\mathbb{R}^3) \supset L^2(\mathbb{R}^3)$), unter (2) das Teilchen im ∞-tiefen Potentialtopf ($\longleftrightarrow L_0^2(\mathbb{L}^3)$), unter (3) das freie Teilchen mit periodischen RB ($\longleftrightarrow L^2(\mathbb{L}^3)$), und unter (4) der harmonische Oszillator ($\longleftrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$) zu diskutieren. Verwende die folgenden EW-Gleichungen (1-dimensionale Probleme),

(1)	$\frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 u_k = E_k u_k$	$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(ikx)$	$k \in \mathbb{R}$	$E_k = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$
(2)	$\frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 u_n = E_n u_n$	$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{\pi}{L}nx)$	$n \in \mathbb{Z}^+$	$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\pi}{L}n)^2$
(3)	$\frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 u_n = E_n u_n$	$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}\exp(i\frac{2\pi}{L}nx)$	$n \in \mathbb{Z}$	$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}(\frac{2\pi}{L}n)^2$
(4)	$(\frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^2)u_n = E_n u_n$	$u_n(x) = N_n e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}} H_n(\alpha x)$	$n \in \mathbb{Z}_0^+$	$E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$

um die entsprechenden EW-Gleichungen, die sich auf die Bewegung eines Teilchens in 3 Dimensionen beziehen, zu lösen. Setze $\mathbb{L}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq L\}$. Beachte, daß die Normierungskonstanten $N_n = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}}$ n-abhängig sind, wobei $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ ist.

1. (a) Berechne die EWe und zugehörigen uneigentlichen Eigenfunktionen des Hamiltonoperators $\mathbf{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2 + \mathbf{P}_3^2)$, der in $L(\mathbb{R}^3) \supset L^2(\mathbb{R}^3)$ definiert ist und der die Bewegung eines freien Teilchens in 3 Dimensionen beschreibt.

   (b) Gib die Entartung der EWe von $\mathbf{H}$ und die von $\mathbf{P}_1$ mit zugehörigen Eigenfunktionen bezüglich $L(\mathbb{R}^3)$ an.

2. (a) Berechne die EWe und zugehörige auf 1 normierten Eigenfunktionen des Hamiltonoperators $\mathbf{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2 + \mathbf{P}_3^2)$, der in $L_0^2(\mathbb{L}^3)$ definiert ist und der die Bewegung eines Teilchens im ∞-tiefen Potentialtopf in 3 Dimensionen beschreibt. Verwende

   $$u(0, x_2, x_3) = u(L, x_2, x_3) = u(x_1, 0, x_3) = u(x_1, L, x_3) = u(x_1, x_2, 0) = u(x_1, x_2, L) = 0$$

   (b) Gib die Entartung der ersten fünf EWe von $\mathbf{H}$ und allgemein die von $\mathbf{P}_1^2$ mit zugehörigen Eigenfunktionen bezüglich $L_0^2(\mathbb{R}^3)$ an.

3. (a) Berechne die EWe und zugehörige auf 1 normierten Eigenfunktionen des Hamiltonoperators $\mathbf{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2 + \mathbf{P}_3^2)$, der in $L^2(\mathbb{L}^3)$ definiert ist und der die Bewegung eines freien Teilchens mit periodischen Randbedingungen in 3 Dimensionen beschreibt. Verwende

   $$u(x_1, x_2, x_3) = u(x_1 + L, x_2, x_3) = u(x_1, x_2 + L, x_3) = u(x_1, x_2, x_3 + L)$$

   (b) Gib die Entartung der ersten fünf EWe von $\mathbf{H}$ und allgemein die von $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3$ mit zugehörigen Eigenfunktionen bezüglich $L^2(\mathbb{L}^3)$ an.

4. (a) Berechne die EWe und zugehörige auf 1 normierten Eigenfunktionen des Hamiltonoperators $\mathbf{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2 + \mathbf{P}_3^2) + \frac{m\omega^2}{2}(\mathbf{X}_1^2 + \mathbf{X}_2^2 + \mathbf{X}_3^2)$, der in $L^2(\mathbb{R}^3)$ definiert ist und der die Bewegung eines Teilchens im isotropen Oszillatorpotential in 3 Dimensionen beschreibt.

   (b) Gib die Entartung der EWe von $\mathbf{H}$ und die von $\mathbf{H}_1$ bezüglich $L^2(\mathbb{R}^3)$ an.

[3] Zeitunabhängige Schrödingergleichung:

Eigenwerte, Eigenfunktionen und Entartung von Eigenwerten, Vereinfachung des EW–Problems durch eine geeignete unitäre Transformation

Beispiel 3: Betrachtet wird das System eines freien geladenen Teilchens mit der Masse m, der Ladung e und ohne Spin, das sich in drei Raumdimensionen in einem konstanten Magnetfeld $\vec{\mathsf{B}}$ bewegt. Der zugehörige Hamiltonoperator $\mathbf{H}$ ist gegeben durch

$$\boxed{\mathbf{H} \;=\; \tfrac{1}{2m}\big(\vec{\mathbf{P}} - \tfrac{e}{c}\vec{\mathsf{A}}\big)^2 + e\,\mathbf{V}(\vec{\mathbf{X}})}$$

wobei $\vec{\mathsf{A}}(\underline{x})$ das Vektorpotential, $\mathbf{V}(\underline{x})$ ein skalares Potential darstellt und weiters $\vec{\mathsf{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathsf{A}}$ gilt. Es wird $\vec{\mathsf{B}} = (0,0,B)$ angenommen, bzw. die sogenannte Landau–Eichung gewählt. Das heisst, dass $\mathbf{V}(\underline{x}) = \mathbf{0}$ und $\vec{\mathsf{A}}(\underline{x}) = (0, B\,x, 0)$ angenommen ist.

1. Gib den Hamiltonoperator $\mathbf{H}(B)$ und die zugehörige stationäre Schrödingergleichung an.

2. Kann das entsprechende EW–Problem exakt gelöst werden?

3. Zeige, dass der Operator

$$\boxed{U(\xi) \;=\; \exp\left\{\tfrac{i}{\hbar m\xi}\mathbf{P}_x\mathbf{P}_y\right\}}$$

   ein unitärer Operator ist, der den Zustandsraum $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ auf sich abbildet, wobei $\xi = \left|\frac{eB}{mc}\right|$ als Abkürzung eingeführt wurde.

4. Zeige, dass

$$\boxed{U(\xi)\,\mathbf{H}(B)\,U(\xi)^\dagger \;=\; \mathbf{H}'(B) \;=\; \tfrac{1}{2m}{\mathbf{P}_x}^2 + \tfrac{m\xi^2}{2}{\mathbf{X}_x}^2 + \tfrac{1}{2m}{\mathbf{P}_z}^2}$$

   gilt, dh. der ursprüngliche Hamiltonoperator $\mathbf{H}(B)$ in einen neuen Operator $\mathbf{H}'(B)$ transformiert wurde, dessen EW–Problem exakt gelöst werden kann.

5. Berechne die Eigenwerte, ihre Entartung und die zugehörigen Eigenfunktionen von $\mathbf{H}'(B)$.

6. Wie lautet der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten von $\mathbf{H}'(B)$ und $\mathbf{H}(B)$ und deren zugehörigen Eigenfunktionen.

7. Berechne die Eigenfunktionen von $\mathbf{H}(B)$ explizit.