[4] Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte:

Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und Unschärfen für reine Zustände

Beispiel 1: Berechne für reine Zustände eines Teilchens der Masse m im ∞-tiefen Potentialtopf (Intervall: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{L}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}\}$) Erwartungswerte bestimmter Operatoren, bzw. Wahrscheinlichkeiten und Unschärfen (1-dimensionales Problem). Verwende die orthonormierten Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_n(x) &= \sqrt{\tfrac{2}{L}} \cos\left\{\tfrac{\pi}{L}(2n-1)x\right\} \qquad & n \in \mathbb{Z}^+ \\ \mathbf{u}_n(x) &= \sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin\left\{\tfrac{\pi}{L}(2n)x\right\} \qquad & n \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

1. Nimm an, daß zur Zeit $t \neq 0$ das System durch den reinen Zustand

$$\psi(x,t) = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{g}_1(x,t) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{u}_1(x,t)$$

gegeben ist. Setze $\omega_j = E_j/\hbar$ und beweise, daß $\left\|\psi(t)\right\|^2 = 1$ gilt.

2. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung der Energie des Teilchens zum Zeitpunkt $t \neq 0$ den Meßwert
(a) $E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$, bzw.
(b) $E_2 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$, bzw.
(c) $E_{2n-1} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{(2n-1)\pi}{L}\right)^2$ mit $n \geq 2$, bzw.
(d) $E_{2n} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{(2n)\pi}{L}\right)^2$ mit $n \geq 2$, bzw.
(e) E_1 **oder** E_2 zu finden, wenn sich das System im Zustand $\psi(x,t)$ befindet.

3. Berechne den Erwartungswert des Hamiltonoperators $\mathbf{H}$, wenn sich das System im Zustand $\psi(x,t)$ befindet.

4. Berechne die Erwartungswerte der Operatoren $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ und $\mathbf{P}^2$, wobei

$$\begin{aligned} [\mathcal{S}(\mathbf{X})\, f]\,(x) &= \sin(\tfrac{\pi}{L}x)\, f(x) \\ [\mathbf{P}^2\, f]\,(x) &= -\hbar^2 \partial_x^2\, f(x) \end{aligned}$$

mit $f \in L_0^2(\mathbb{L}) \cap \mathscr{D}_{\mathbf{P}^2}$ zu verwenden ist, wenn zur Zeit $t \neq 0$ der Zustand des Systems durch $\psi(x,t)$ gegeben ist. Interpretiere das Ergebnis. Beweise die Relationen

$$\begin{aligned} [\mathcal{S}(\mathbf{X})\, \mathbf{g}_n]\,(x) &= \tfrac{1}{2}\left(-\mathbf{u}_{n-1}(x) + \mathbf{u}_n(x)\right) \qquad & n \in \mathbb{Z}^+ \\ [\mathcal{S}(\mathbf{X})\, \mathbf{u}_n]\,(x) &= \tfrac{1}{2}\left(+\mathbf{g}_n(x) + \mathbf{g}_{n+1}(x)\right) \qquad & n \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

5. Berechne die Unschärfen $\Delta\mathcal{S}(\mathbf{X})_t$ und $\Delta\mathbf{P}^2{}_t$ und untersuche für welche Zeiten das entsprechende Unschärfeprodukt ein Minimum ist.

6. ** Berechne den Kommutator $[\mathcal{S}(\mathbf{X})\,,\mathbf{P}^2]$ durch Anwendung von $[\mathcal{S}(\mathbf{X})\,,\mathbf{P}^2]$ auf ein beliebiges Element $f \in L_0^2(\mathbb{L}) \cap \mathscr{D}_{\mathbf{P}^2}$.

[4] Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte:

Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und Unschärfen für gemischte Zustände

Beispiel 2: Berechne für gemischte Zustände eines Teilchens der Masse m im ∞-tiefen Potentialtopf (Intervall: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{L}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}\}$) Erwartungswerte bestimmter Operatoren, bzw. Wahrscheinlichkeiten und Unschärfen (1-dimensionales Problem). Verwende die orthonormierten Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_n(x) &= \sqrt{\tfrac{2}{L}}\, \cos\left\{\tfrac{\pi}{L}(2n-1)x\right\} && n \in \mathbb{Z}^+ \\ \mathbf{u}_n(x) &= \sqrt{\tfrac{2}{L}}\, \sin\left\{\tfrac{\pi}{L}(2n)x\right\} && n \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

1. Nimm an, daß zur Zeit $t \neq 0$ das System durch den gemischten Zustand

$$\{\mathbf{g}_1(t), \mathbf{u}_1(t)\} \quad \text{mit den Wahrscheinlichkeiten} \quad \lambda_{g_1} = \tfrac{3}{4}\ ;\ \lambda_{u_1} = \tfrac{1}{4}$$

gegeben ist. Setze $\omega_j = E_j/\hbar$ und beweise, daß *Spur* $\boldsymbol{\rho}(t) = 1$ gilt, wobei $\boldsymbol{\rho}(t)$ den entsprechenden Dichteoperator darstellt.

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \big|\, \mathbf{g}_1(t)\big\rangle \tfrac{3}{4} \big\langle \mathbf{g}_1(t)\, \big| + \big|\, \mathbf{u}_1(t)\big\rangle \tfrac{1}{4} \big\langle \mathbf{u}_1(t)\, \big| = \boldsymbol{\rho}(0)$$

2. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung der Energie des Teilchens zum Zeitpunkt $t \neq 0$ den Meßwert
(a) $E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$, bzw.
(b) $E_2 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$, bzw.
(c) $E_{2n-1} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{(2n-1)\pi}{L}\right)^2$ mit $n \geq 2$, bzw.
(d) $E_{2n} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{(2n)\pi}{L}\right)^2$ mit $n \geq 2$, bzw.
(e) E_1 **oder** E_2 zu finden, wenn sich das System im Zustand $\boldsymbol{\rho}(t)$ befindet.

3. Berechne den Erwartungswert des Hamiltonoperators H, wenn sich das System im Zustand $\boldsymbol{\rho}(t)$ befindet.

4. Berechne die Erwartungswerte der Operatoren $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ und $\mathbf{P}^2$, wobei

$$\begin{aligned} [\mathcal{S}(\mathbf{X})\, f]\,(x) &= \sin(\tfrac{\pi}{L}x)\, f(x) \\ [\mathbf{P}^2\, f]\,(x) &= -\hbar^2 \partial_x^2\, f(x) \end{aligned}$$

mit $f \in L_0^2(\mathbb{L}) \cap \mathscr{D}_{\mathbf{P}^2}$ zu verwenden ist, wenn zur Zeit $t \neq 0$ der Zustand des Systems durch $\boldsymbol{\rho}(t)$ gegeben ist. Interpretiere das Ergebnis. Verwende die Relationen

$$\begin{aligned} [\mathcal{S}(\mathbf{X})\, \mathbf{g}_n]\,(x) &= \tfrac{1}{2}\left(-\mathbf{u}_{n-1}(x) + \mathbf{u}_n(x)\right) && n \in \mathbb{Z}^+ \\ [\mathcal{S}(\mathbf{X})\, \mathbf{u}_n]\,(x) &= \tfrac{1}{2}\left(+\mathbf{g}_n(x) + \mathbf{g}_{n+1}(x)\right) && n \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

5. Berechne die Unschärfen $\Delta\mathcal{S}(\mathbf{X})_t$ und $\Delta\mathbf{P}^2{}_t$ und untersuche für welche Zeiten das entsprechende Unschärfeprodukt ein Minimum ist.

[4] Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte:

Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und Unschärfen für reine Zustände

Beispiel 3: Berechne für reine Zustände eines Teilchens der Masse m im ∞-tiefen Potentialtopf (Intervall: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq +L\}$) Erwartungswerte bestimmter Operatoren, bzw. Wahrscheinlichkeiten und Unschärfen (1-dimensionales Problem). Verwende die orthonormierten Eigenfunktionen

$$\mathbf{w}_n(x) = \sqrt{\tfrac{2}{L}}\, \sin\left\{\tfrac{\pi}{L} n x\right\} \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

1. Nimm an, daß zur Zeit $t \neq 0$ das System durch den reinen Zustand

$$\psi(x,t) = \tfrac{1}{2}\, \mathbf{w}_1(x,t) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\, \mathbf{w}_2(x,t)$$

gegeben ist. Setze $\omega_j = E_j/\hbar$ und beweise, daß $\left\|\psi(t)\right\|^2 = 1$ gilt.

2. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung der Energie des Teilchens zum Zeitpunkt $t \neq 0$ den Meßwert
(a) $E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$, bzw.
(b) $E_2 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$, bzw.
(c) $E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ mit $n \geq 2$, bzw.
(d) E_1 **oder** E_2 zu finden, wenn sich das System im Zustand $\psi(x,t)$ befindet.

3. Berechne den Erwartungswert des Hamiltonoperators $\mathbf{H}$, wenn sich das System im Zustand $\psi(x,t)$ befindet.

4. Berechne die Erwartungswerte der Operatoren $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ und $\mathbf{P}^2$, wobei

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{C}(\mathbf{X})\, f\right](x) &= \cos(\tfrac{\pi}{L}x)\, f(x) \\ \left[\mathbf{P}^2\, f\right](x) &= -\hbar^2 \partial_x^2\, f(x) \end{aligned}$$

mit $f \in L_0^2(\mathbb{L}) \cap \mathscr{D}_{\mathbf{P}^2}$ zu verwenden ist, wenn zur Zeit $t \neq 0$ der Zustand des Systems durch $\psi(x,t)$ gegeben ist. Interpretiere das Ergebnis. Beweise die Relationen

$$\left[\mathcal{C}(\mathbf{X})\, \mathbf{w}_n\right](x) = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{w}_{n+1}(x) + \mathbf{w}_{n-1}(x)\right) \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

wobei $\mathbf{w}_0(x) = 0$ zu verwenden ist.

5. Berechne die Unschärfen $\Delta\mathcal{C}(\mathbf{X})_t$ und $\Delta\mathbf{P}^2{}_t$ und untersuche für welche Zeiten das entsprechende Unschärfeprodukt ein Minimum ist.

[4] Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte:

Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und Unschärfen für gemischte Zustände

Beispiel 4: Berechne für gemischte Zustände eines Teilchens der Masse m im ∞-tiefen Potentialtopf (Intervall: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq +L\}$) Erwartungswerte bestimmter Operatoren, bzw. Wahrscheinlichkeiten und Unschärfen (1-dimensionales Problem). Verwende die orthonormierten Eigenfunktionen

$$\boxed{\mathbf{w}_n(x) = \sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin\left\{\tfrac{\pi}{L} n x\right\} \qquad n \in \mathbb{Z}^+}$$

1. Nimm an, daß zur Zeit $t \neq 0$ das System durch den gemischten Zustand

$$\{\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t)\} \quad \text{mit den Wahrscheinlichkeiten} \quad \lambda_{u_1} = \tfrac{3}{4}\ ;\ \lambda_{u_2} = \tfrac{1}{4}$$

gegeben ist. Setze $\omega_j = E_j/\hbar$ und beweise, daß *Spur* $\boldsymbol{\rho}(t) = 1$ gilt, wobei $\boldsymbol{\rho}(t)$ den entsprechenden Dichteoperator darstellt.

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \left|\, \mathbf{u}_1(t)\right\rangle \tfrac{3}{4} \left\langle \mathbf{u}_1(t)\, \right| + \left|\, \mathbf{u}_2(t)\right\rangle \tfrac{1}{4} \left\langle \mathbf{u}_2(t)\, \right| = \boldsymbol{\rho}(0)$$

2. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung der Energie des Teilchens zum Zeitpunkt $t \neq 0$ den Meßwert
(a) $E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$, bzw.
(b) $E_2 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$, bzw.
(c) $E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ mit $n \geq 2$, bzw.
(d) E_1 **oder** E_2 zu finden, wenn sich das System im Zustand $\psi(x,t)$ befindet.

3. Berechne den Erwartungswert des Hamiltonoperators $\mathbf{H}$, wenn sich das System im Zustand $\boldsymbol{\rho}(t)$ befindet.

4. Berechne die Erwartungswerte der Operatoren $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ und $\mathbf{P}^2$, wobei

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{C}(\mathbf{X})\, f\right](x) &= \cos(\tfrac{\pi}{L}x)\, f(x) \\ \left[\mathbf{P}^2\, f\right](x) &= -\hbar^2 \partial_x^2\, f(x) \end{aligned}$$

mit $f \in L_0^2(\mathbb{L}) \cap \mathscr{D}_{\mathbf{P}^2}$ zu verwenden ist, wenn zur Zeit $t \neq 0$ der Zustand des Systems durch $\boldsymbol{\rho}(t)$ gegeben ist. Interpretiere das Ergebnis. Verwende die Relationen

$$\left[\mathcal{C}(\mathbf{X})\, \mathbf{w}_n\right](x) = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{w}_{n+1}(x) + \mathbf{w}_{n-1}(x)\right) \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

wobei $\mathbf{w}_0(x) = 0$ zu verwenden ist.

5. Berechne die Unschärfen $\Delta\mathcal{C}(\mathbf{X})_t$ und $\Delta\mathbf{P}^2{}_t$ und untersuche für welche Zeiten das entsprechende Unschärfeprodukt ein Minimum ist.

[4] Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte:

Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und Unschärfen für reine Zustände

Beispiel 5: Berechne für reine Zustände eines freien Teilchens der Masse m mit periodischen RB (Periodizitätsintervall: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq L\}$) Erwartungswerte bestimmter Operatoren, bzw. Wahrscheinlichkeiten und Unschärfen (1-dimensionales Problem). Verwende die orthonormierten Eigenfunktionen

$$\mathbf{u}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left\{i\frac{2\pi}{L}nx\right\} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

1. Nimm an, daß zur Zeit $t \neq 0$ das System durch den reinen Zustand

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \tfrac{2}{3}\,\mathbf{u}_0(t) + \tfrac{\sqrt{5}}{3}\,\mathbf{u}_{+1}(t) \\ \mathbf{u}_n(x,t) &= \mathbf{u}_n(x)\exp(-\tfrac{i}{\hbar}E_n t) \end{aligned}$$

   gegeben ist. Setze $\omega = E_1/\hbar$ und beweise, daß $\left\|\psi(t)\right\|^2 = 1$ gilt.

2. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung der Energie des Teilchens zum Zeitpunkt $t \neq 0$ den Meßwert
   (a) $E_0 = 0$, bzw.
   (b) $E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$, bzw.
   (c) $E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}n\right)^2$ mit $n \geq 2$, bzw.
   (d) E_0 **oder** E_1 zu finden, wenn sich das System im Zustand $\psi(x,t)$ befindet.

3. Berechne den Erwartungswert des Hamiltonoperators $\mathbf{H}$, wenn sich das System im Zustand $\psi(x,t)$ befindet.

4. Berechne die Erwartungswerte der Operatoren $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ und $\mathbf{P}$, wobei

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{S}(\mathbf{X})\,f\right](x) &= \sin(\tfrac{2\pi}{L}x)\,f(x) \\ \left[\mathbf{P}\,f\right](x) &= -i\hbar\partial_x\,f(x) \end{aligned}$$

   mit $f \in L^2(\mathbb{L}) \cap \mathscr{D}_{\mathbf{P}}$ zu verwenden ist, wenn zur Zeit $t \neq 0$ der Zustand des Systems durch $\psi(x,t)$ gegeben ist. Interpretiere das Ergebnis. Beweise die Relationen

$$\left[\mathcal{S}(\mathbf{X})\,\mathbf{u}_n\right](x) = \tfrac{i}{2}\big(\mathbf{u}_{n-1}(x) - \mathbf{u}_{n+1}(x)\big) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

5. Berechne die Unschärfen $\Delta\mathcal{S}(\mathbf{X})_t$ und $\Delta\mathbf{P}_t$ und untersuche für welche Zeiten das entsprechende Unschärfeprodukt ein Minimum ist.

6. Berechne den Kommutator $[\mathcal{S}(\mathbf{X})\,,\mathbf{P}]$ durch Anwendung von $[\mathcal{S}(\mathbf{X})\,,\mathbf{P}]$ auf ein beliebiges Element $f \in L^2(\mathbb{L}) \cap \mathscr{D}_{\mathbf{P}}$.

[4] Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte:

Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und Unschärfen für gemischte Zustände

Beispiel 6: Berechne für gemischte Zustände eines freien Teilchens der Masse m mit periodischen RB (Periodizitätsintervall: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq L\}$) Erwartungswerte bestimmter Operatoren, bzw. Wahrscheinlichkeiten und Unschärfen (1-dimensionales Problem). Verwende die orthonormierten Eigenfunktionen

$$\mathbf{u}_n(x) = \tfrac{1}{\sqrt{L}} \exp\left\{i\tfrac{2\pi}{L}nx\right\} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

1. Nimm an, daß zur Zeit $t \neq 0$ das System durch den gemischten Zustand

$$\begin{aligned} &\{\psi_1(t), \psi_2(t)\} \quad \text{mit den Wahrscheinlichkeiten} \quad \lambda_1 = \tfrac{3}{4}, \lambda_2 = \tfrac{1}{4} \\ &\psi_1(t) = \tfrac{2}{3}\,\mathbf{u}_0(t) + \tfrac{\sqrt{5}}{3}\,\mathbf{u}_{+1}(t) \\ &\psi_2(t) = \tfrac{2}{3}\,\mathbf{u}_0(t) - \tfrac{\sqrt{5}}{3}\,\mathbf{u}_{-1}(t) \\ &\mathbf{u}_n(x,t) = \mathbf{u}_n(x)\exp(-\tfrac{i}{\hbar}E_n t) \end{aligned}$$

gegeben ist. Setze $\omega = E_1/\hbar$ und beweise, daß $\left\|\psi_j(t)\right\|^2 = 1$ für $j = 1,2$ und damit für die entsprechende *Spur* $\boldsymbol{\rho}(t) = 1$ gilt, wobei $\boldsymbol{\rho}(t)$ den entsprechenden Dichteoperator darstellt.

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \left|\,\psi_1(t)\right\rangle\tfrac{3}{4}\left\langle\psi_1(t)\,\right| + \left|\,\psi_2(t)\right\rangle\tfrac{1}{4}\left\langle\psi_2(t)\,\right| \neq \boldsymbol{\rho}(0)$$

2. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung der Energie des Teilchens zum Zeitpunkt $t \neq 0$ den Meßwert
(a) $E_0 = 0$, bzw.
(b) $E_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$, bzw.
(c) $E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2\pi}{L}n\right)^2$ mit $n \geq 2$, bzw.
(d) E_0 oder E_1 zu finden, wenn sich das System im Zustand $\boldsymbol{\rho}(t)$ befindet.

3. Berechne den Erwartungswert des Hamiltonoperators $\mathbf{H}$, wenn sich das System im Zustand $\boldsymbol{\rho}(t)$ befindet.

4. Berechne die Erwartungswerte der Operatoren $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ und $\mathbf{P}$, wobei

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{S}(\mathbf{X})\,f\right](x) &= \sin(\tfrac{2\pi}{L}x)\,f(x) \\ \left[\mathbf{P}\,f\right](x) &= -i\hbar\partial_x\,f(x) \end{aligned}$$

mit $f \in L^2(\mathbb{L}) \cap \mathscr{D}_{\mathbf{P}}$ zu verwenden ist, wenn zur Zeit $t \neq 0$ der Zustand des Systems durch $\boldsymbol{\rho}(t)$ gegeben ist. Vergleiche das Ergebnis mit dem vorhergehenden Beispiel. Verwende dabei die Relationen

$$\left[\mathcal{S}(\mathbf{X})\,\mathbf{u}_n\right](x) = \tfrac{i}{2}\big(\mathbf{u}_{n-1}(x) - \mathbf{u}_{n+1}(x)\big) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

5. Berechne die Unschärfen $\Delta\mathcal{S}(\mathbf{X})_t$ und $\Delta\mathbf{P}_t$ und untersuche für welche Zeiten das entsprechende Unschärfeprodukt ein Minimum ist.

[4] Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte:

Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und Unschärfen für reine Zustände

Beispiel 7: Berechne für reine Zustände eines Teilchens der Masse m, das sich in einem Oszillatorpotential bewegt, Erwartungswerte bestimmter Operatoren, bzw. Wahrscheinlichkeiten und Unschärfen (1-dimensionales Problem). Verwende die folgenden Definitionen und Beziehungen

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\mathbf{H} & = & \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^2 & \alpha & = & \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \\
\mathbf{a} & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\mathbf{X} + \frac{i}{\hbar\alpha}\mathbf{P}\right) & \mathbf{a}^\dagger & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\mathbf{X} - \frac{i}{\hbar\alpha}\mathbf{P}\right) \\
\mathbf{X} & = & \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}\right) & \mathbf{P} & = & i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}\right) \\
\mathbf{u}_n(x) & = & N_n\, e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}}\, H_n(\alpha x) & N_n & = & \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}} \\
E_n & = & \hbar\omega(n+\frac{1}{2}) & \mathbf{u}_n(-x) & = & (-1)^n\,\mathbf{u}_n(x) \\
\mathbf{a}\,\big|\,n\big\rangle & = & \sqrt{n}\,\big|\,n-1\big\rangle & \mathbf{a}^\dagger\,\big|\,n\big\rangle & = & \sqrt{n+1}\,\big|\,n+1\big\rangle \\
\mathbf{H} & = & \hbar\omega\left(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{1}\right) & \mathbf{1} & = & \left[\mathbf{a}\,,\,\mathbf{a}^\dagger\right]
\end{array}
$$

(siehe **Grau:** III.23)

1. Nimm an, daß zur Zeit $t \neq 0$ das System durch den reinen Zustand

$$
\begin{array}{rcl}
\psi(t) & = & \sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathbf{u}_0(t) - \frac{i}{\sqrt{3}}\,\mathbf{u}_1(t) \\
\mathbf{u}_n(x,t) & = & \mathbf{u}_n(x)\,\exp(-i\omega(n+\frac{1}{2})t) \longleftrightarrow \big|\,n\big\rangle \exp(-i\omega(n+\frac{1}{2})t)
\end{array}
$$

   gegeben ist. Beweise, daß $\left\|\psi(t)\right\|^2 = 1$ gilt.

2. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung der Energie des Teilchens zum Zeitpunkt $t \neq 0$ den Meßwert
   (a) $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$, bzw.
   (b) $E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$, bzw.
   (c) $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ mit $n \geq 2$, bzw.
   (d) E_0 **oder** E_1 zu finden, wenn sich das System im Zustand $\psi(x,t)$ befindet.

3. Berechne den Erwartungswert des Hamiltonoperators $\mathbf{H}$, wenn sich das System im Zustand $\psi(x,t)$ befindet.

4. Berechne die Unschärfen $\Delta\mathbf{X}_t$ und $\Delta\mathbf{P}_t$ und untersuche für welche Zeiten das entsprechende Unschärfeprodukt ein Minimum ist.

[4] Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte:

Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und Unschärfen für gemischte Zustände

Beispiel 8: Berechne für gemischte Zustände eines Teilchens der Masse m, das sich in einem Oszillatorpotential bewegt, Erwartungswerte bestimmter Operatoren, bzw. Wahrscheinlichkeiten und Unschärfen (1-dimensionales Problem). Verwende die folgenden Definitionen und Beziehungen

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \tfrac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + \tfrac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^2 & \alpha &= \sqrt{\tfrac{m\omega}{\hbar}} \\
\mathbf{a} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\mathbf{X} + \tfrac{i}{\hbar\alpha}\mathbf{P}\right) & \mathbf{a}^\dagger &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\mathbf{X} - \tfrac{i}{\hbar\alpha}\mathbf{P}\right) \\
\mathbf{X} &= \sqrt{\tfrac{\hbar}{2m\omega}}\left(\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}\right) & \mathbf{P} &= i\sqrt{\tfrac{\hbar m\omega}{2}}\left(\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}\right) \\
\mathbf{u}_n(x) &= N_n\, e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}}\, H_n(\alpha x) & N_n &= \sqrt{\tfrac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}} \\
E_n &= \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2}) & \mathbf{u}_n(-x) &= (-1)^n\,\mathbf{u}_n(x) \\
\mathbf{a}\,|\,n\rangle &= \sqrt{n}\,|\,n-1\rangle & \mathbf{a}^\dagger\,|\,n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|\,n+1\rangle \\
\mathbf{H} &= \hbar\omega\left(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}\mathbf{1}\right) & \mathbf{1} &= \left[\mathbf{a}\,,\,\mathbf{a}^\dagger\right]
\end{aligned}
$$

1. Nimm an, daß zur Zeit $t \neq 0$ das System durch den gemischten Zustand

$$
\begin{aligned}
\{\psi_1(t), \psi_2(t)\} &\qquad \text{mit den Wahrscheinlichkeiten} \quad \lambda_1 = \tfrac{2}{3}\ ;\ \lambda_2 = \tfrac{1}{3} \\
\psi_1(t) &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,u_0(t) + \tfrac{i}{\sqrt{3}}\,u_1(t) \\
\psi_2(t) &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,u_0(t) - \tfrac{i}{\sqrt{3}}\,u_1(t) \\
\mathbf{u}_n(x,t) &= \mathbf{u}_n(x)\,\exp(-i\omega(n+\tfrac{1}{2})t) \longleftrightarrow\ |\,n\rangle\exp(-i\omega(n+\tfrac{1}{2})t)
\end{aligned}
$$

gegeben ist. Beweise, daß $\left\|\psi_j(t)\right\|^2 = 1$ für $j = 1,2$ und damit *Spur* $\boldsymbol{\rho}(t) = 1$ gilt, wobei $\boldsymbol{\rho}(t)$ den entsprechenden Dichteoperator darstellt.

$$\boldsymbol{\rho}(t) = |\,\psi_1(t)\rangle\tfrac{2}{3}\langle\psi_1(t)\,| + |\,\psi_2(t)\rangle\tfrac{1}{3}\langle\psi_2(t)\,| \neq \boldsymbol{\rho}(0)$$

2. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung der Energie des Teilchens zum Zeitpunkt $t \neq 0$ den Meßwert
   (a) $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$, bzw.
   (b) $E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$, bzw.
   (c) $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ mit $n \geq 2$, bzw.
   (d) E_0 **oder** E_1 zu finden, wenn sich das System im Zustand $\boldsymbol{\rho}(t)$ befindet.

3. Berechne den Erwartungswert des Hamiltonoperators $\mathbf{H}$, wenn sich das System im Zustand $\boldsymbol{\rho}(t)$ befindet.

4. Berechne die Unschärfen $\Delta\mathbf{X}_t$ und $\Delta\mathbf{P}_t$ und untersuche für welche Zeiten das entsprechende Unschärfeprodukt ein Minimum ist.

[4] Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte:

Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und Unschärfen für reine Zustände

Beispiel 9: Berechne für reine Zustände eines Teilchens der Masse m im ∞-tiefen Potentialtopf (Intervall: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : -a \leq x \leq a\}$) Erwartungswerte bestimmter Operatoren, bzw. Wahrscheinlichkeiten und Unschärfen (1-dimensionales Problem). Verwende die orthonormierten Eigenfunktionen

$$\begin{array}{rclclr} \mathbf{u}_{2\ell-1}(x) & = & \frac{1}{\sqrt{a}}\cos\left\{\frac{\pi}{2a}(2\ell-1)x\right\} & = & \mathbf{g}_\ell(x) & \ell \in \mathbb{Z}^+ \\ \mathbf{u}_{2\ell}(x) & = & \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\left\{\frac{\pi}{2a}2\ell x\right\} & = & \mathbf{u}_\ell(x) & \ell \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

(siehe **Grau:** III.11)

1. Nimm an, daß zur Zeit $t = 0$ das System durch den reinen Zustand

$$\psi(x,0) = \begin{cases} A\,(a^2 - x^2) & \ldots \quad -a \leq x \leq a \\ 0 & \ldots \quad \text{sonst} \end{cases}$$

   gegeben ist. Bestimme die Normierungskonstante A so, daß $\|\psi(0)\|^2 = 1$ gilt.

2. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung der Energie des Teilchens zum Zeitpunkt $t = 0$ den Meßwert

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 n^2 \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

   zu finden, wenn sich das System im Zustand $\psi(x,0)$ befindet.

3. Zeige, daß der Erwartungswert und die Unschärfe der Energie zum Zeitpunkt $t = 0$ durch die Ausdrücke

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \frac{5\hbar^2}{4ma^2} \qquad \Delta E = \frac{\sqrt{5}\hbar}{4ma^2}$$

   gegeben sind, wenn sich das System im Zustand $\psi(x,0)$ befindet.

4. Benütze dabei die folgenden Formeln

$$\begin{array}{rcl} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^2} & = & \frac{\pi^2}{8} \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^4} & = & \frac{\pi^4}{96} \\ \int dz\, z^2 \cos(\alpha z) & = & \frac{2z}{\alpha^2}\cos(\alpha z) + \frac{\alpha^2 z^2 - 2}{\alpha^3}\sin(\alpha z) + C, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \end{array}$$

[4] Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte:

Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und Unschärfen für reine Zustände

Beispiel 10: Berechne für reine Zustände eines Teilchens der Masse m, das sich in einem Oszillatorpotential bewegt, Erwartungswerte bestimmter Operatoren, bzw. Wahrscheinlichkeiten und Unschärfen (1-dimensionales Problem). Verwende die folgenden Definitionen und Beziehungen

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\mathbf{H} & = & \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{X}^2 & \alpha & = & \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \\
\mathbf{a} & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\mathbf{X} + \frac{i}{\hbar\alpha}\mathbf{P}\right) & \mathbf{a}^\dagger & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\mathbf{X} - \frac{i}{\hbar\alpha}\mathbf{P}\right) \\
\mathbf{X} & = & \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\mathbf{a}^\dagger + \mathbf{a}\right) & \mathbf{P} & = & i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\mathbf{a}^\dagger - \mathbf{a}\right) \\
\mathbf{u}_n(x) & = & N_n\, e^{-\frac{(\alpha x)^2}{2}}\, H_n(\alpha x) & N_n & = & \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n! \sqrt{\pi}}} \\
E_n & = & \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) & \mathbf{u}_n(-x) & = & (-1)^n\, \mathbf{u}_n(x) \\
\mathbf{a}\,\big|\, n\big\rangle & = & \sqrt{n}\,\big|\, n-1\big\rangle & \mathbf{a}^\dagger\,\big|\, n\big\rangle & = & \sqrt{n+1}\,\big|\, n+1\big\rangle \\
\mathbf{H} & = & \hbar\omega\left(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{1}\right) & \mathbf{1} & = & \left[\mathbf{a}\,,\,\mathbf{a}^\dagger\right]
\end{array}
$$

(siehe **Grau:** III.22)

1. Berechne für die Energieeigenzustände $\left\{\mathbf{u}_n(x)\,\big|\, n \in \mathbb{Z}_0^+\right\}$ des linearen harmonischen Oszillators die Erwartungswerte der zu den Operatoren

   $$\mathbf{X}, \mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3, \mathbf{X}^4 \quad \text{und} \quad \mathbf{P}, \mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3, \mathbf{P}^4$$

   gehörigen Observablen.

2. Berechne für $\left\{\mathbf{u}_n(x)\,\big|\, n \in \mathbb{Z}_0^+\right\}$ die Unschärfen $\Delta\mathbf{X}$ und $\Delta\mathbf{P}$, sowie das zugehörige Unschärfenprodukt $\Delta\mathbf{X}\,.\,\Delta\mathbf{P}$.

3. Zeige, daß für die Energieeigenzustände $\left\{\mathbf{u}_n(x)\,\big|\, n \in \mathbb{Z}_0^+\right\}$ des harmonischen Oszillators

   $$\langle\mathbf{T}\rangle = \langle\mathbf{V}\rangle$$

   gilt, wobei $\mathbf{T}$ den Operator der kinetischen Energie und $\mathbf{V}$ den Operator der potentiellen Energie darstellt.

[4] Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte:

Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und Unschärfen für reine Zustände

Beispiel 11: Berechne für reine Zustände eines Teilchens der Masse $m^\star$, das sich in einem Coulombpotential bewegt, Erwartungswerte bestimmter Operatoren und Wahrscheinlichkeiten (3-dimensionales Problem: Wasserstoffatom ohne Spin). Verwende die folgenden Definitionen

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \tfrac{1}{2m^\star}\vec{\mathbf{P}}^2 - \tfrac{e^2}{\mathbf{R}} && m^\star \sim m_e \\
\mathbf{H}\,\mathbf{u}_{n\ell m} &= -\tfrac{\hbar^2}{2m^\star a^2}\tfrac{1}{n^2}\,\mathbf{u}_{n\ell m} && n \in \mathbb{Z}^+ \\
\vec{\mathbf{L}}^2\,\mathbf{u}_{n\ell m} &= \hbar^2\ell(\ell+1)\,\mathbf{u}_{n\ell m} && \ell = 0,1,\ldots,n-1 \\
\mathbf{L}_z\,\mathbf{u}_{n\ell m} &= \hbar m\,\mathbf{u}_{n\ell m} && m = -\ell,-\ell+1,\ldots,\ell \\
a &= \tfrac{\hbar^2}{m^\star e^2} && a\ldots \text{Bohr'scher Radius} \\
\mathbf{u}_{n\ell m}(r,\vartheta,\varphi) &= R_{n\ell}(r)\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) && \langle \mathbf{u}_{n\ell m}\,,\,\mathbf{u}_{n'\ell' m'}\rangle = \\
& && = \delta_{nn'}\,\delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'} \\
Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) &= (-1)^m\sqrt{\tfrac{2\ell+1}{4\pi}\tfrac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,P_\ell^m(\cos\vartheta)\,e^{im\varphi} \\
P_\ell^m(z) &= \tfrac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!}\,(1-z^2)^{m/2}\,\tfrac{d^{\ell+m}}{dz^{\ell+m}}(1-z^2)^\ell \\
R_{n\ell}(r) &= \tfrac{2}{n^2}\sqrt{\tfrac{(n-\ell-1)!}{[(n+\ell)!]^3}}\,a^{-3/2}\,F_{n\ell}(\tfrac{2r}{na}) \\
F_{n\ell}(\rho) &= \rho^\ell\,e^{-\rho/2}\,L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}(\rho)
\end{aligned}$$

(siehe **Grau:** Seite 410 und Seite 401)

1. Nimm an, daß zur Zeit $t \neq 0$ das System durch den reinen Zustand
$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \tfrac{1+2i}{3}\,\mathbf{u}_{100}(t) + \tfrac{1+i}{3}\,\mathbf{u}_{210}(t) + \tfrac{1-i}{3}\,\mathbf{u}_{311}(t) \\
\mathbf{u}_{n\ell m}(t) &= \mathbf{u}_{n\ell m}\,\exp(-i\omega_n t) \longleftrightarrow \big|\,n\ell m\big\rangle\exp(-i\omega_n t)
\end{aligned}$$
gegeben ist. Setzte $\omega_n = E_n/\hbar$ und beweise, daß $\big\|\psi(t)\big\|^2 = 1$ gilt.

2. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung der Energie des Teilchens zum Zeitpunkt $t \neq 0$ den Meßwert
(a) $E_n = -\frac{\hbar^2}{2m^\star a^2}\frac{1}{n^2}$, für beliebiges $n \in \mathbb{Z}^+$, bzw.
(b) E_1 oder E_2, bzw. E_1 oder E_3, bzw. E_2 oder E_3 zu finden, wenn sich das System im Zustand $\psi(t)$ befindet.

3. Berechne den Erwartungswert von $\mathbf{H}$, wenn sich das System im Zustand $\psi(t)$ befindet.

4. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung des Quadrates des Drehimpulses des Teilchens zum Zeitpunkt $t \neq 0$ den Meßwert
(a) $\epsilon_\ell = -\hbar^2\ell(\ell+1)$, für beliebiges $\ell \in \mathbb{Z}_0^+$, bzw.
(b) ϵ_0 oder ϵ_1 zu finden, wenn sich das System im Zustand $\psi(t)$ befindet.

5. Berechne den Erwartungswert des Operators $\vec{\mathbf{L}}^2$, wenn sich das System im Zustand $\psi(t)$ befindet.