Elektrodynamik und Relativitätstheorie Übungen

1. a) Lösen Sie die Laplacegleichung $\triangle\phi = 0$ in Kugelkoordinaten durch einen Produktansatz für $\phi(r, \theta, \varphi)$.
   b) Was sind die Legendrepolynome, welche Gleichung erfüllen sie, welche Eigenschaften haben sie?
   c) Analoge Fragestellung für die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \varphi)$.
   d) Da die Legendrepolynome einen vollständigen Satz orthogonaler Funktionen bilden, kann jede Funktion $f(x)$ im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ nach ihnen entwickelt werden. Wie sieht diese Entwicklung aus?
   e) Zeigen Sie, daß das an einem Punkt $\vec{x}$ herrschende Potential, das von einer Einheitsladung an der Stelle $\vec{x}'$ herrührt, wie folgt entwickelt werden kann:
   $$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} P_\ell(\cos\gamma).$$
   Dabei bedeutet $r_<$ (bzw. $r_>$) die kleinere (bzw. größere) der beiden Größen $|\vec{x}|$ and $|\vec{x}'|$, während γ der Winkel zwischen $\vec{x}'$ und $\vec{x}$ ist. (Drehen Sie die Koordinatenachsen so, daß $\vec{x}'$ auf der z-Achse liegt.)

2. Gegeben sei eine allgemeine sphärisch symmetrische Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ mit endlicher Gesamtladung Q. Berechnen Sie
   a1) das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$; a2) das zugehörige elektrostatische Feld $\vec{E}(\vec{r})$; a3) die zugehörige elektrostatische Feldenergie $U_{el.}$ Diskutieren Sie bei der Berechnung von a1–a3 die möglichen verschiedenen Lösungswege.
   b) Spezialisieren Sie die Ergebnisse auf
   b1) den Fall eines homogen geladenen Kugelvolumens mit der Raumladungsdichte ρ_0; b2) den Fall einer homogen geladenen Kugelfläche mit der Flächenladungsdichte σ_0.
   c) Spezialisieren Sie das Ergebnis für das Potential $\phi(\vec{r})$ auf den Fall eines H-Atoms im Grundzustand. Dabei soll der Kern als im Ursprung ruhende Punktladung behandelt werden und für die Dichte der Elektronenladung nehme man
   $$-e\frac{1}{\pi a^3}e^{-2\pi/a} \quad \left(a = \frac{\hbar^2}{me^2} = \text{Bohrradius}\right).$$