Elektrodynamik und Relativitätstheorie Übungen

3 (a) a1) Eine leitende Kugel werde in das Feld einer ruhenden Punktladung Q gebracht (Kugelradius a, Kugelmittelpunkt im Koordinatenursprung. Ort der Punktladung $\vec{r}_0 = (0, 0, b)$ mit $b > a$). Ist die leitende Kugel geerdet, so gilt $\phi(x = a) = 0$.

Berechnen Sie das Potential im Außenraum der Kugel mit Hilfe einer Spiegelladung. Wo wird diese liegen, welche Ladung trägt sie?
Diskutieren Sie, wie sich das Potential ändert, wenn

a2) die Kugel eine vorgegebene Gesamtladung Q trägt,

a3) die Kugel sich auf vorgegebenem Potential V befindet.

(b) Geben Sie für a1) die induzierte Flächenladungsdichte σ an.

(c) Berechnen Sie für die Fälle a1) – a3) die Kraft $\vec{F}$, welche die leitende Kugel auf die Punktladung ausübt.

4 Die Resultate des vorhergehenden Beispiels lassensich nützen um die Greensche Funktion des Laplaceoperators für Dirichletsche Randbedingungen auf der Kugel zu berechnen. Begründen Sie warum (welche Gleichung erfüllt $G_D(\vec{r}, \vec{r}')$. was gilt für $G_D(\vec{r}, \vec{r}')$ wenn $|\vec{r}'| = a$) und geben Sie die Greensche Funktion $G_D(\vec{r}, \vec{r}')$ an.

Zeigen Sie, daß das Potential von Beispiel 3 im Außenraum durch

$$\phi(\vec{r}) = \int_V G_0(\vec{r}, \vec{r}')\, \rho(\vec{r}')\, d^3r' + \frac{1}{4\pi} \int \phi(a, \theta', \varphi') \frac{a(r^2 - a^2)}{(r^2 + a^2 - 2ar\cos\gamma)^{3/2}}\, d\Omega'$$

beschrieben werden kann und wenden Sie diese Lösung auf die Fälle a1) und a3) des vorhergehenden Beipiels an.