# Elektrodynamik und Relativitätstheorie Übungen

12 Im Vakuum ist es einem gleichförmig bewegten geladenen Teilchen unmöglich, ein Photon abzustrahlen. Zeige, daß es in einem Medium mit Brechungsindex $n(\omega) \neq 1$ kinematisch erlaubt ist, daß ein geladenes Teilchen Photonen abstrahlt, welche im Medium Energie $\hbar\omega$ und Impuls $n(\omega)\hbar\omega/c$ haben (Tscherenkow-Strahlung).

(a) Welche Voraussetzungen müssen für die Abstrahlung eines einzelnen Photons bezüglich $n(\omega)$ und der anfänglichen Geschwindigkeit des Teilchen $v$ erfüllt sein? Berechne den Winkel $\theta$ zwischen der Ausbreitungsrichtung des Photons und des ursprünglichen Geschwindigkeitsvektors des Teilchens als Funktion von $\omega$, $v$ und $n(\omega)$.

(b) Für große Frequenzen $\omega$ geht der Brechungsindex eines realistischen Mediums notwendigerweise auf 1 zurück, sodaß die Abstrahlung eines einzelnen Photons durch den Tscherenkow-Effekt wieder unmöglich wird. Zeige, daß ein schnelles geladenes Teilchen dagegen 2 Photonen emittieren kann, sodaß $n(\omega_2) = 1$ erlaubt ist. Welche Bedingungen müssen die Teilchengeschwindigkeit und die Frequenz $\omega_1$ des anderen Photon dafür erfüllen (harter Tscherenkow-Effekt). Was ist die höchste erreichbare Frequenz $\omega_2$?

13 In einem Betatron werden Elektronen auf einer kreisförmigen Bahn vom Radius $R$ zwischen den Polschuhen eines drehsymmetrischen Elektromagneten beschleunigt. Das beschleunigende elektrische Feld wird durch zeitliche Änderung des Magnetfeldes induziert. Zeige: Damit die Elektronen auf der Kreisbahn bleiben, muß die Wideroe-Bedingung

$$B_R \ = \ \tfrac{1}{2}\overline{B}$$

erfüllt sein. Dabei ist $B_R$ das Magnetfeld auf der Elektronenbahn und $\overline{B}$ der Mittelwert des Magnetfeldes auf der von der Bahn umschlossenen Fläche,

$$\overline{B} \ = \ \frac{1}{\pi R^2} \int d\vec{f} \cdot \vec{B}(\vec{x}) \quad .$$

*Hinweis*: Schreiben Sie die relativistische Bewegungsgleichung

$$\tfrac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) \ = \ \tfrac{d}{dt}\vec{p} \ = \ \vec{F} \ = \ q(\vec{E} + \tfrac{\vec{v}}{c} \times \vec{B})$$

in Zylinderkoordinaten auf und benutzen Sie die Maxwellschen Gleichungen.

14 In der relativistischen Quantenelektrodynamik werden durch quantenfeldtheoretische Effekte ("Vakuumpolarisation") Phänomene wie Streuung von Licht an Licht möglich, die keine klassische Entsprechung haben. Diese können aber in erster Näherung durch folgenden Zusatz zur klassischen Lagrangedichte des elektrodynamischen Feldes beschrieben werden (Euler-Heisenberg-Lagrangedichte):

$$\mathcal{L}_{em} + \zeta \left[ 4(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})^2 + 7(F^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu})^2 \right]$$

($\zeta = \frac{2\alpha^2 \hbar^3}{45 m^4 c^5}$, wobei $\alpha$ die Feinstrukturkonstante $\frac{1}{137,...}$ und $m_e$ die Elektronmasse ist.)

(a) Leite die damit definierten modifizierten Maxwellgleichungen im Vakuum über die Euler-Lagrange-Gleichungen her!

(b) Zeige, daß eine herkömmliche einzelne ebene elektromagnetische Welle weiterhin eine Lösung der nun nichtlinearen modifizierten Maxwellgleichungen bildet!