Elektrodynamik und Relativitätstheorie Übungen
Tutorium 13. 10. 95

1. Sei $\vec{E}(\vec{r}) = Q\frac{\vec{r}}{r^3}$ das elektrostatische Feld einer positiven Punktladung Q im Ursprung.

   (a) Zeigen Sie, daß $\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi Q\delta(\vec{r})$. Für den Fall $\vec{r} = 0$ wende man den Gaußschen Satz an.

   (b) Zeigen Sie, daß $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Für $\vec{r} = 0$ benutze man die Definition der Rotation als Volumenableitung

   $$(\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oint d\vec{f} \times \vec{E}$$

   (c) Berechnen Sie aus der Definition des elektrostatischen Potentials

   $$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

   das Potential einer Punktladung im Ursprung.

2. Für makroskopische Beschreibungen in der Elektrodynamik erweist sich die Einführung idealer Flächenladungen (bzw. Flächenströme) als günstig. Leiten Sie aus der integralen Form der Maxwell-Gleichungen das Verhalten der Normal- und Tangentialkomponenten der $\vec{E}$- (bzw. $\vec{B}$-) Felder bei Durchtritt durch eine Trennfläche her, wenn diese mit einer Flächenladungsdichte σ (bzw. einem Flächenstrom $\vec{\kappa}$) belegt ist.

3. Ein zeitlicher konstanter Strom fließe mit homogener Stromdichte $\vec{j}_0$ durch einen unendlich langen, geraden (z-Richtung) zylindrischen Draht (Radius R). Berechnen Sie das Magnetfeld im Innen- und Außenraum des Drahtes mittels Ansatz. Dieser enthält eine zu bestimmende Funktion $f(\rho)$ der Zylinderkoordinate ρ. Die Maxwell-Gleichungen bestimmen $f(\rho)$ nur bis auf eine Konstante. Welche Argumente legen diese fest?

4. (a) Schreiben Sie die fouriertransformierten Maxwellgleichungen an. Wie sieht die Kontinuitätsgleichung im Fourierraum aus?
   (b) Für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ erhält man aus den Maxwellgleichungen einfache Wellengleichungen für das $\vec{E}$ und $\vec{B}$-Feld. Wie sehen diese aus? Wie

kann man diese Wellengleichungen direkt im Fourierraum erhalten?
(c) Warum ist folgende Aussage falsch: durch skalare Multiplikation von $i\vec{k} \times \vec{E}(\vec{k}) = i\omega\vec{B}(\vec{k})$ mit $\vec{k}$ folgt $\vec{k} \cdot \vec{B}(\vec{k}) = 0$, das heißt im Ortsraum gilt automatisch $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ und muß nicht extra gefordert werden.

5. (a) Arbeitet man in der Lorentzeichung, so gilt $\Box\phi = -4\pi\rho$ und $\Box\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$. Welche Gleichung muß die zugehörige Greenfunktion $D(\vec{r}-\vec{r}', t-t')$ erfüllen? Zeigen Sie unter Verwendung der Fourierdarstellung für die Greenfunktion und für die δ-Funktion, daß

$$D(\vec{k}, \omega) = \frac{4\pi}{k^2 - \omega^2/c^2}.$$

(b) Berechnen Sie $D_{\mathrm{ret}}(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$ durch Rücktransformieren in den Ortsraum, wobei die Pole bei $ck = \pm\omega$ wie folgt umgangen werden sollen:

$$D_{\mathrm{ret}}(\vec{k}, \omega) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{4\pi}{k^2 - (\frac{\omega}{c} + i\epsilon)^2}.$$

6. Eine Punktladung Q_1 befinde sich im Abstand d vom Zentrum einer dünnen gleichförmig geladenen Kreisscheibe mit dem Radius R_0 und der Gesamtladung Q_2. Berechnen Sie die Kraft $\vec{F}_1$, welche auf die Punktladung wirkt und betrachten Sie speziell den Fall $d \gg R_0$.

7. Gegeben sei eine leitende Kugelschale mit Radius a, deren beide Hälften durch einen schmalen Ring aus isolierendem Material voneinander getrennt sind. Der isolierende Ring liege in der Ebene $z = 0$, die obere Halbkugel befinde sich auf dem Potential $+V$, die untere auf dem Potential $(-V)$. Bestimmen Sie das Potential außer- und innerhalb der Kugel.