Elektrodynamik und Relativitätstheorie Übungen

Tutorium: 10. 1. 96

1. Eine Rakete werde dadurch angetrieben, daß sie in einer gleichbleibenden Richtung kontinuierlich Masse mit einer konstanten Geschwindigkeit w bezüglich ihres momentanen Ruhesystems abstoße. Die Rakete sei anfänglich in Ruhe bezüglich eines Inertialsystems S und habe Anfangsmasse m_0. Zu einem späteren Zeitpunkt habe sie eine Geschwindigkeit v bzgl. S und eine verminderte Ruhemasse m. Wie groß ist v als Funktion von m/m_0?
   Anleitung: Betrachte zunächst ein Objekt mit Ruhemasse m, das sich in zwei Objekte mit Ruhemassen m_1 und m_2 teilt, die sich mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 bezüglich des Schwerpunktsystems voneinander wegbewegen, und leite eine Beziehung zwischen m_1, m, v_1 und v_2 her.

2. Bestimme die relativistische Bewegung eines geladenen Teilchens in parallelen homogenen elektrischen und magnetischen Feldern, die in z-Richtung zeigen sollen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das Teilchen im Ursprung mit momentanem Impuls $\vec{p}(0) = (p_x(0), 0, p_z(0))$.

3. Wenn das Photon eine nichtverschwindende Ruhemasse m hätte, würde bei vorgegebener divergenzfreier Quelldichte j^μ die Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes

   $$\mathcal{L} \;=\; -\tfrac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \;+\; \tfrac{1}{8\pi} m^2 A_\mu A^\mu \;-\; \tfrac{1}{c} j_\mu A^\mu$$

   lauten.

   (a) Zeigen Sie, daß die Euler-Lagrange-Gleichungen

   $$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \;-\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \;=\; 0$$

   auf

   $$\partial_\mu A^\mu \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad (\Box + m^2) A^\mu \;=\; \tfrac{4\pi}{c} j^\mu$$

   führen.

   (b) Zeigen Sie, daß sich für das Potential einer im Ursprung ruhenden Punktladung statt des Coulomb-Potentials das Yukawa-Potential ergibt:

   $$\phi(\vec{r}) \propto \frac{\exp(-mr)}{r}$$

   Anleitung: Lösen Sie die Differentialgleichung über Fouriertransformation und verwenden Sie

   $$\int_0^\infty dk \frac{k \sin(kr)}{k^2 + m^2} = \frac{\pi}{2} \exp(-mr).$$